سؤالات کنکور سراسری داخل ۹۵

۱- اگر $\alpha=\sqrt[4]{3\sqrt{2}-4}$ و $\beta=\sqrt[4]{3\sqrt{2}+4}$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$ کدام است؟

۱) 6　۲) 8　۳) $6\sqrt{2}$　۴) $7\sqrt{2}$

۲- اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $\sqrt{3x+4}>2|x-1|-x$، بازه‌ی (a,b) باشد، طول وسط این بازه، کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$　۲) 3　۳) $\frac{7}{2}$　۴) 4

۳- حد عبارت $[\sin(x-\frac{\pi}{3})]\cos 3x+[\tan^2 x]$، وقتی $x\to\frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزءصحیح است.)

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) حد ندارد.

۴- تعداد نقاط ناپیوسته‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x^2]$ در بازه‌ی $[-1,2]$، کدام است؟

۱) ۳　۲) ۴　۳) ۵　۴) ۶

۵- به ازای کدام مقادیر m، خط به معادله‌ی $(m+2)y=mx$، موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y=\sqrt{1+x^2}$ است؟

۱) $m>-1$　۲) $m<-1$　۳) $m>1$　۴) $m<1$

۶- دنباله‌ی $\{\frac{n^2+(-1)^n}{2n^2+2}\}$، چگونه است؟

۱) غیریکنوا ـ واگرا　۲) غیریکنوا ـ همگرا　۳) نزولی ـ همگرا　۴) صعودی ـ واگرا

۷- حد عبارت $\frac{1}{x^2}(1-x^2[\frac{1}{x^2}])$ وقتی $x\to 0$، کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزءصحیح است.)

۱) صفر　۲) ۱　۳) ∞　۴) حد ندارد.

۸- بزرگ‌ترین کران پایین دنباله‌ی $\{\frac{2n+1}{3n+1}\}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$　۲) $\frac{5}{7}$　۳) $\frac{3}{4}$　۴) ۱

۹- خط مجانب منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt[3]{8x^3+2x^2}$، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{1}{6}$　۲) $\frac{1}{3}$　۳) $\frac{2}{3}$　۴) $\frac{5}{6}$

۱۰- اگر $f(x)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4})$ باشد، حاصل $f^{-1}(x)+f^{-1}(\frac{1}{x})$، کدام است؟

۱) $2x$　۲) $\frac{2}{x}$　۳) x^2-1　۴) صفر

۱۱- خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=(x+2)e^{1-x}$ در نقطه‌ی $x=1$ با خطی که این نقطه‌ی تماس را به مبدأ مختصات وصل کند زاویه‌ی α می‌سازد. $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) $0/5$　۲) ۱　۳) $1/5$　۴) ۲

۱۲- خط به معادله‌ی $y=3x-2$ در نقطه‌ی $x=2$، بر منحنی پیوسته‌ی $y=f(x)$ مماس است. حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f^2(x)-4f(x)}{x-2}$ کدام است؟

۱) ۳　۲) ۶　۳) ۱۲　۴) ۱۵

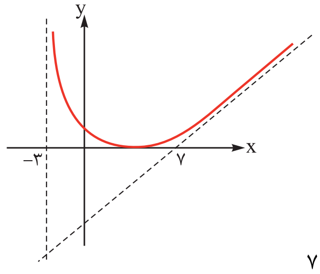
۱۳- طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع $y=(5-x)\sqrt[3]{x^2}$، کدام است؟

۱) -1　۲) صفر　۳) ۱　۴) ۲

۱۴- در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{3}$، با کدام ارتفاع، کم‌ترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　۲) ۱　۳) $\sqrt[3]{2}$　۴) $\sqrt{2}$

۱۵- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^۲+ax+b}{x+c}$ است. b کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۹

۱۶- مقدار میانگین تابع $f(x)=\frac{x^۲-۲}{x^۲}$ بر بازه‌ی $[۲,۴]$، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۱۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

۱۷- حاصل $\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۱+\cos۲x}{۲\sin^۲x}$، کدام است؟

۱) $۱-\sqrt{۲}$ ۲) $۱-\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}-۱$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

سؤالات کنکور سراسری خارج ۹۵

۱۸- حاصل عبارت $\sqrt[۶]{۱۲}\times\sqrt[۴]{۵۴}\times\sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۶}}$، کدام است؟

۱) $۶\sqrt[۶]{۲}$ ۲) $۳\sqrt[۶]{۳۲}$ ۳) $۲\sqrt[۳]{۹}$ ۴) ۶

۱۹- اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x^۲-۲|<|x+۱|-۱$، بازه‌ی (a,b) باشد، طول وسط این بازه، کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

۲۰- حد عبارت $\sin\frac{x}{۲}[\cos\frac{x}{۲}]-\cos x[\sin۲x]$، وقتی $x\to\pi$، کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزءصحیح است.)

۱) −۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) حد ندارد.

۲۱- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & ۰<x<a\\ ۱-\frac{x}{۴} & x\geq a\end{cases}$، همواره پیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار a

۲۲- به ازای کدام مقادیر m، خط به معادله‌ی $y=(m-۲)x+۳$، موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y=\tan^{-۱}\frac{۱}{x}$ است؟

۱) $۰<m<۱$ ۲) $۰<m<۲$ ۳) $۱<m<۲$ ۴) $۲<m<۳$

۲۳- دنباله‌ی $\{[\frac{(-۱)^n}{n}]\}$، چگونه است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزءصحیح است.)

۱) نزولی ـ همگرا ۲) صعودی ـ واگرا ۳) غیریکنوا ـ همگرا ۴) غیریکنوا ـ واگرا

۲۴- اگر $\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x^۲-۱}=\frac{۳}{۲}$ باشد، b کدام است؟

۱) −۸ ۲) −۶ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۵- بزرگ‌ترین کران پایین دنباله $\{\sqrt{n^۲+۳n}-n\}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

۲۶- اگر $f(x)=\sqrt{\frac{x+۱}{x-۲}}$ باشد، مجانب‌های نمودار تابع $y=xf(x)$ با کدام عرض، متقاطع هستند؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۲۵ ۴) ۳/۵

۲۷- به ازای کدام مقدار a خط به معادله‌ی $y=-۳x+۲$ ، بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x^{۲}+a}{x-۲}$ ، مماس است؟

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۸- امتداد خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{۱+\cos x}$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۳}$ با نیمساز ربع سوم زاویه‌ی α می‌سازد. $\tan\alpha$ کدام است؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۳

۲۹- تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-۹}{h}=\frac{۳}{۲}$ باشد، مشتق تابع $g(x)=x\sqrt{f(x)}$ در $x=۲$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

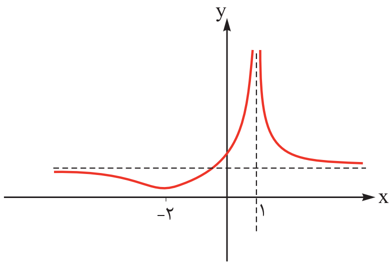
۳۰- طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $y=(x-۱)^{۲}\sqrt[۳]{x^{۲}}$ ، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۱- اندازه‌ی زاویه‌ی حاده‌ی یک مثلث قائم‌الزاویه با سرعت ثابت $\frac{۱}{۲۰}$ رادیان بر ثانیه کاهش می‌یابد. اگر طول وتر آن ثابت و برابر ۱۰ واحد باشد، وقتی اندازه‌ی این زاویه‌ی حاده به $\frac{\pi}{۶}$ برسد، سرعت تغییر مساحت مثلث قائم‌الزاویه، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۲۵ ۳) ۱/۵ ۴) ۱/۷۵

۳۲- شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^{۲}+a}{x^{۲}+bx+c}$ است. a کدام است؟



۱) -۲ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۳۳- میانگین تابع $f(x)=\frac{x^{۲}+۴}{x^{۲}}$ ، بر بازه‌ی $[۲,a]$ برابر $\frac{۵}{۴}$ است. a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) ۸

۳۴- حاصل $\int_{۰}^{\frac{۲\pi}{۳}}\frac{dx}{۱+\cos x}$ ، کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}-۱$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۱- **گزینه۴** اول حاصل $(\alpha^۲+\beta^۲-\alpha\beta)(\alpha^۲+\beta^۲+\alpha\beta)$ را با استفاده از اتحاد مزدوج و مربع دوجمله‌ای ساده می‌کنیم:

$$(\alpha^۲+\beta^۲-\alpha\beta)(\alpha^۲+\beta^۲+\alpha\beta)=(\alpha^۲+\beta^۲)^۲-\alpha^۲\beta^۲$$
$$=\alpha^۴+\beta^۴+\alpha^۲\beta^۲$$

حالا مقدار $\alpha=\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}-۴}$ و $\beta=\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}+۴}$ را جایگزین می‌کنیم:

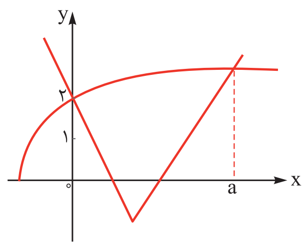
$$\alpha^۴+\beta^۴+\alpha^۲\beta^۲=۳\sqrt{۲}-۴+۳\sqrt{۲}+۴+(\sqrt[۴]{(۳\sqrt{۲}-۴)(۳\sqrt{۲}+۴)})^۲$$
$$=۶\sqrt{۲}+\sqrt{(۳\sqrt{۲})^۲-۱۶}=۶\sqrt{۲}+\sqrt{۱۸-۱۶}=۷\sqrt{۲}$$

۲- **گزینه۳** برای حل نامعادله، محدوده‌ی x را با توجه به ریشه‌ی داخل قدرمطلق و این‌که برای تعریف‌شده بودن رادیکال باید $x\le\frac{-۴}{۳}$ باشد جدا می‌کنیم:

$$\sqrt{۳x+۴}>۲|x-۱|-x$$
$$x\ge ۱ \Rightarrow \sqrt{۳x+۴}>x-۲$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۳x+۴>x^۲-۴x+۴ \Rightarrow x^۲-۷x<۰$$
$$\Rightarrow ۰<x<۷ \xrightarrow{\cap(x\ge ۱)} ۱\le x<۷ \quad (I)$$
$$\frac{-۴}{۳}\le x<۱ \Rightarrow \sqrt{۳x+۴}>-۳x+۲$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۳x+۴>۹x^۲-۱۲x+۴ \Rightarrow ۹x^۲-۱۵x<۰$$
$$\Rightarrow ۰<x<\frac{۵}{۳} \xrightarrow{\cap(\frac{-۴}{۳}\le x<۱)} ۰<x<۱ \quad (II)$$

پس مجموعه‌ی جواب نامعادله می‌شود اجتماع (I) و (II) یعنی $(۰<x<۱)\cup(۱\le x<۷)=(۰,۷)$ بنابراین، ازای (a,b) به صورت $(۰,۷)$ است که طول نقطه‌ی وسط این بازه می‌شود $\frac{۰+۷}{۲}=\frac{۷}{۲}$.

البته می‌توانستیم اول نمودار دو تابع $y=\sqrt{۳x+۴}$ و $y=۲|x-۱|-x$ را رسم کنیم:



در این صورت مشخص بود که بازه‌ی جواب نامعادله‌ی $\sqrt{۳x+۴}<۲|x-۱|-x$ بازه‌ی $(۰,a)$ است که در آن a برابر طول نقطه‌ی برخورد خط $y=۲(x-۱)-x=x-۲$ و منحنی $y=\sqrt{۳x+۴}$ است.

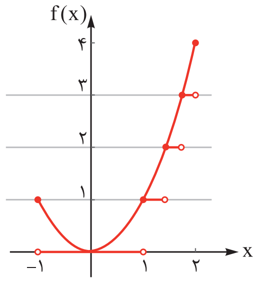
۳- **گزینه۳** چون حد عامل‌های داخل جزء صحیح، عدد صحیح می‌شوند پس حد راست و حد چپ را جدا محاسبه می‌کنیم:

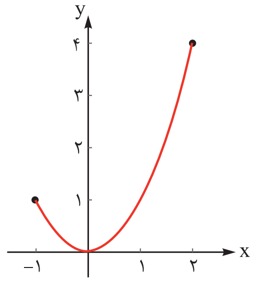
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}^+}[\sin(x-\frac{\pi}{۳})]\cos ۳x+[\tan^۲ x]=[۰^+](-۱)+[۳^+]=۰+۳=۳$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}^-}[\sin(x-\frac{\pi}{۳})]\cos ۳x+[\tan^۲ x]=[۰^-](-۱)+[۳^-]=۱+۲=۳$$

پس حد عبارت برابر ۳ است.

۴- **گزینه۳** نمودار تابع $y=x^۲$ و $f(x)=[x^۲]$ را در بازه‌ی $[-۱,۲]$ رسم می‌کنیم. حتمن یادتان هست که برای این کار نمودار را روی خطوط افقی تصویر می‌کنیم:





همان‌طور که در شکل می‌بینیم، نمودار دارای پنج نقطه‌ی ناپیوستگی (یعنی ۱- و ۱ و $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و ۲) است.

$x^۲$ وقتی $-۱\le x\le ۲$ است در نقاط ۱-، ۰، ۱، $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$ و ۲ برابر عددی صحیح می‌شود. $x^۲$ در $x=۰$ مینیمم دارد پس در این نقطه پیوسته است و در نتیجه تعداد نقاط ناپیوستگی تابع می‌شود پنج‌تا.

۵- **گزینه۱** شیب خطوط مماس بر منحنی $y=\sqrt{۱+x^۲}$ برابر مشتق تابع یعنی $y'=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$ است و چون همواره $|x|<\sqrt{۱+x^۲}$ پس $\frac{|x|}{\sqrt{۱+x^۲}}<۱$ و در نتیجه باید $-۱<\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}<۱$ باشد یعنی شیب خط $(m+۲)y=mx$ باید عددی بین ۱- و ۱ باشد:

$$-۱<\frac{m}{m+۲}<۱ \to |\frac{m}{m+۲}|<۱ \to |m|<|m+۲|$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} m^۲<m^۲+۴m+۴ \Rightarrow ۴m+۴>۰ \Rightarrow m>-۱$$

۶- **گزینه۲** اول حد دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲+(-۱)^n}{۲n^۲+۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^۲}{۲n^۲}=\frac{۱}{۲}$$

برای بررسی یکنوایی، چند جمله‌ی اول دنباله را می‌نویسیم:

$$\left\{\frac{n^۲+(-۱)^n}{۲n^۲+۲}\right\}:۰\nearrow\frac{۱}{۲},\searrow\frac{۲}{۵}$$

با توجه به سیر جمله‌ها دنباله غیریکنوا است.

۷- **گزینه۴** با ضرب‌کردن $\frac{۱}{x^۲}$ در عبارت داخل پرانتز داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲}(۱-x^۲[\frac{۱}{x^۲}])=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲}-[\frac{۱}{x^۲}]$$

پس حد عبارت به صورت $a-[a]$ وقتی $a\to\infty$ درمی‌آید که همان‌طور که گفتیم حد ندارد.

۸- **گزینه۱** همان‌طور که در درس‌نامه داشتیم جمله‌ی اول دنباله، حد و جهت تغییرات آن را مشخص می‌کنیم:

$$\{\frac{۲n+۱}{۳n+۱}\}\ ,\ a_۱=\frac{۳}{۴}\ ,\ \text{حد}=\frac{۲}{۳}$$
$$y=\frac{۲x+۱}{۳x+۱}\Rightarrow y'=\frac{-۱}{(۳x+۱)^۲}<۰ \Rightarrow \text{نزولی}$$

پس دنباله به شکل $a_۱=\frac{۳}{۴}\searrow\frac{۲}{۳}$ تغییر می‌کند و بزرگ‌ترین کران پایین آن برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

۹- **گزینه۱** برای پیداکردن معادله‌ی مجانب مایل از هم‌ارزی استفاده می‌کنیم:

$$y=\sqrt[3]{8x^3+2x^2} \Rightarrow y=2(x+\frac{2}{3\times 8}) \Rightarrow y=2x+\frac{1}{6}$$

و خط مجانب مایل، محور y ها را در نقطه‌ی $(0,\frac{1}{6})$ قطع می‌کند.

۱۰- **گزینه۴** اول ضابطه‌ی تابع وارون را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4}) \Rightarrow 2y-x=\sqrt{x^2+4}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 4y^2-4xy+x^2=x^2+4$$

$$\Rightarrow 4y^2-4xy=4 \Rightarrow x=\frac{y^2-1}{y}=y-\frac{1}{y} \Rightarrow f^{-1}(x)=x-\frac{1}{x}$$

حالا عبارت خواسته‌شده را پیدا می‌کنیم:

$$f^{-1}(x)+f^{-1}(\frac{1}{x})=x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-x=0$$

۱۱- **گزینه۲** اول $x=1$ را در معادله‌ی منحنی قرار می‌دهیم:

$$f(x)=(x+2)e^{1-x} \Rightarrow f(1)=3e^0=3 \Rightarrow A(1,3)$$

شیب خطی که نقطه‌ی A را به مبدأ وصل می‌کند برابر $m_1=\frac{3-0}{1-0}=3$ است. حالا شیب خط مماس در $x=1$ را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x)=e^{1-x}-e^{1-x}(x+2) \Rightarrow m_2=f'(1)=e^0-e^0(3)$$

$$=1-3=-2$$

حالا تانژانت زاویه‌ی بین دو خط را پیدا می‌کنیم:

$$\tan\alpha=|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}|=|\frac{3-(-2)}{1+(3)(-2)}|=1$$

۱۲- **گزینه۳** وقتی خط $y=3x-2$ در نقطه‌ی $x=2$ بر منحنی $f(x)$ مماس است پس اولاً $f(2)=4$ و ثانیاً $f'(2)=3$. حالا حاصل حد خواسته‌شده را با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-4f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2f(x)f'(x)-4f'(x)}{1}$$

$$=2f(2)f'(2)-4f'(2)=2(4)(3)-4(3)=24-12=12$$

۱۳- **گزینه۱** مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

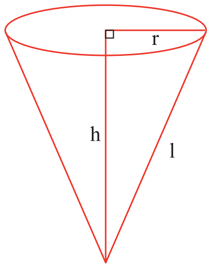
$$y=(5-x)\sqrt[3]{x^2}=5x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}$$

$$y'=\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

$$y''=-\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}-\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}=-\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(1+x)=\frac{-10(x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

مشتق دوم تابع یعنی $y''=\frac{-10(x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$ در نقطه‌ی $x=-1$ تغییر علامت می‌دهد، پس طول نقطه‌ی عطف تابع برابر ۱- است.

۱۴- **گزینه۳** در شکل زیر داریم $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}$، پس $r^2h=1$، از طرفی با توجه به مثلث قائم‌الزاویه (رابطه‌ی فیثاغورس) داریم $r^2+h^2=l^2$. برای آن‌که کم‌ترین مقدار جنس برای ساختن قیف مصرف شود باید مساحت جانبی قیف مینیمم باشد. مساحت جانبی مخروط برابر $S=\pi rl$ است، پس:



$$\left.\begin{array}{l} S=\pi rl \\ r^2h=1 \Rightarrow r=\frac{1}{\sqrt{h}} \\ r^2+h^2=l^2 \Rightarrow l=\sqrt{\frac{1}{h}+h^2} \end{array}\right\} \Rightarrow S=\pi\frac{1}{\sqrt{h}}\sqrt{\frac{1}{h}+h^2}$$

رابطه‌ی مساحت جانبی را ساده می‌کنیم و از آن مشتق می‌گیریم:

$$S=\pi\sqrt{\frac{1}{h^2}+h} \xrightarrow{S'=0} -\frac{2}{h^3}+1=0 \Rightarrow h=\sqrt[3]{2}$$

۱۵- **گزینه۲** اولین خط $x=-3$ مجانب قائم تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x+c}$ است، پس $c=3$؛ یعنی ضابطه‌ی تابع به $y=\frac{x^2+ax+b}{x+3}$ تبدیل می‌شود. ثانیاً مجانب مایل تابع از نقطه‌ی $(7,0)$ می‌گذرد، پس:

$$\begin{array}{l|l} x^2+ax+b & x+3 \\ \hline -(x^2+3x) & x+a-3 \Rightarrow y=x+a-3 \text{ مجانب‌مایل} \\ (a-3)x-b & \end{array}$$

حال نقطه‌ی $(7,0)$ را در مجانب مایل جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(7,0) \Rightarrow 0=7+a-3 \Rightarrow a=-4$$

پس ضابطه‌ی تابع می‌شود $y=\frac{x^2-4x+b}{x+3}$، ثالثاً منحنی تابع بر محور x ها مماس است، پس معادله‌ی $y=0$ یعنی $x^2-4x+b=0$ باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد یعنی: $\Delta=0 \Rightarrow 16-4b=0 \Rightarrow b=4$

۱۶- **گزینه۳** می‌دانیم مقدار میانگین تابع $f(x)$ بر بازه‌ی $[a,b]$ برابر است با $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$، پس:

$$\frac{\int_2^4 \frac{x^2-2}{x^2}dx}{4-2}=\frac{\int_2^4(1-\frac{2}{x^2})dx}{2}=\frac{x+\frac{2}{x}\Big|_2^4}{2}=\frac{(4+\frac{1}{2})-(2+1)}{2}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

۱۷- **گزینه۲** می‌دانیم $1+\cos 2x=2\cos^2 x$، پس:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2\sin^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cot^2 x+1-1)dx$$

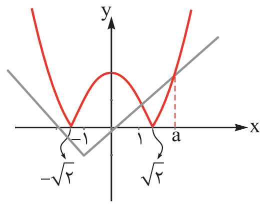
$$=-\cot x-x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=(0-\frac{\pi}{2})-(-1-\frac{\pi}{4})=1-\frac{\pi}{4}$$

۱۸- گزینه۴ فرجه‌ی همه‌ی رادیکال‌ها را به ۱۲ تبدیل می‌کنیم (۱۲ کوچک‌ترین مضرب مشترک ۳ و ۴ و ۶ است):

$$\sqrt[۶]{۱۲}\times\sqrt[۴]{۵۴}\times\sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۶}}=\sqrt[۱۲]{(۲^۲\times۳)^۲}\times\sqrt[۱۲]{(۳^۳\times۲)^۳}\times\sqrt[۱۲]{۲^۴\times۲\times۳}$$

$$=\sqrt[۱۲]{۲^۴\times۲^۳\times۲^۵\times۳^۲\times۳^۹\times۳}=\sqrt[۱۲]{۲^{۱۲}\times۳^{۱۲}}=۲\times۳=۶$$

۱۹- گزینه۳ برای ساده‌تر شدن راه‌حل، اول نمودار دو تابع $y=|x^۲-۲|$ و $y=|x+۱|-۱$ را رسم می‌کنیم:



از روی شکل مشخص است بازه‌ای که در آن نامعادله‌ی $|x^۲-۲|<|x+۱|-۱$ برقرار است بازه‌ی $(۱,a)$ است که در آن a نقطه‌ی دیگر برخورد دو منحنی است. طول نقطه‌ی وسط بازه‌ی $(۱,a)$ باید عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد پس ۱ و ۲ حذف می‌شوند. ۳ و ۴ را با پیداکردن نقطه‌ی برخورد از روی نقطه‌ی وسط بررسی می‌کنیم:

$$۱/۵=\frac{۱+a}{۲}\Rightarrow a=۲\Rightarrow|۴-۲|=|۲+۱|-۱$$

پس جواب ۳ است.

۲۰- گزینه۱ وقتی $x\to\pi$ عبارت‌های داخل جزءصحیح، عدد صحیح می‌شوند پس باید حد راست و حد چپ را جدا کنیم:

$$\lim_{x\to\pi^+}\sin\frac{x}{۲}[\cos\frac{x}{۲}]-\cos x[\sin ۲x]=(۱)[۰^-]-(-۱)[۰^+]$$
$$=-۱-۰=-۱$$

$$\lim_{x\to\pi^-}\sin\frac{x}{۲}[\cos\frac{x}{۲}]-\cos x[\sin ۲x]=(۱)[۰^+]-(-۱)[۰^-]$$
$$=۰-۱=-۱$$

پس حد عبارت برابر ۱- است.

۲۱- گزینه۲ تابع باید در $x=a$ پیوسته باشد، پس باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & ۰<x<a\\ ۱-\frac{x}{۴} & x\geq a\end{cases}$$

$$\frac{۱}{a}=۱-\frac{a}{۴}\Rightarrow a^۲-۴a+۴=۰\Rightarrow a=۲$$

۲۲- گزینه۳ شیب خط‌های مماس بر منحنی $y=\tan^{-۱}\frac{۱}{x}$ از مشتق تابع یعنی $y'=\frac{-\frac{۱}{x^۲}}{۱+\frac{۱}{x^۲}}=\frac{-۱}{x^۲+۱}$ به دست می‌آید. کسر $-\frac{۱}{x^۲+۱}$ همواره $-۱<\frac{-۱}{x^۲+۱}<۰$ است (دقت کنید $x\neq۰$ است)، پس شیب خط $y=(m-۲)x+۳$ باید در این بازه باشد، یعنی:

$$-۱<m-۲<۰\Rightarrow ۱<m<۲$$

۲۳- گزینه۴ در دنباله‌ی $\{[\frac{(-۱)^n}{n}]\}$ اولین کسر داخل جزءصحیح مرتبن مثبت و منفی می‌شود پس دنباله غیریکنوا است و ثانین وقتی $n\to\infty$ داریم:

$$n\text{ زوج}:\ \lim_{n\to\infty}[\frac{(-۱)^n}{n}]=[۰^+]=۰$$

$$n\text{ فرد}:\ \lim_{n\to\infty}[\frac{(-۱)^n}{n}]=[۰^-]=-۱$$

پس دنباله واگرا است.

۲۴- گزینه۱ چون وقتی $x\to۱$ حد مخرج کسر برابر صفر است پس حد صورت کسر هم باید صفر شود یعنی:

$$\lim_{x\to۱}\sqrt{ax+b}-۲=\sqrt{a+b}-۲=۰$$

پس $a+b=۴$، از طرف دیگر حاصل حد بعد از رفع ابهام باید برابر $\frac{۳}{۲}$ باشد، پس:

$$\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt{ax+b}-۲}{x^۲-۱}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to۱}\frac{\frac{a}{۲\sqrt{ax+b}}}{۲x}=\frac{\frac{a}{۲\sqrt{a+b}}}{۲}=\frac{a}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

پس $a=۱۲$ و $b=-۸$.

۲۵- گزینه۱ جمله‌ی اول، حد و جهت تغییرات جملات دنباله را تعیین می‌کنیم: $\{\sqrt{n^۲+۳n}-n\}$

$$a_۱=۱\ ,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^۲+۳n}-n=\lim_{n\to\infty}|n+\frac{۳}{۲}|-n=\frac{۳}{۲}$$

$$y=\sqrt{x^۲+۳x}-x\Rightarrow y'=\frac{۲x+۳}{۲\sqrt{x^۲+۳x}}-۱=\frac{۲x+۳-۲\sqrt{x^۲+۳x}}{۲\sqrt{x^۲+۳x}}$$

مشتق تابع همواره مثبت است پس جهت تغییرات دنباله به شکل $a_۱=۱\nearrow\frac{۳}{۲}$ و بزرگ‌ترین کران پایین دنباله برابر ۱ است.

البته برای تعیین جهت تغییرات دنباله می‌توانیم آن را به شکل زیر هم بنویسیم:

$$\sqrt{n^۲+۳n}-n\times\frac{\sqrt{n^۲+۳n}+n}{\sqrt{n^۲+۳n}+n}=\frac{n^۲+۳n-n^۲}{\sqrt{n^۲+۳n}+n}=\frac{۳n}{n(\sqrt{۱+\frac{۳}{n}}+۱)}$$

$$=\frac{۳}{\sqrt{۱+\frac{۳}{n}}+۱}$$

حالا در کسر $\frac{۳}{\sqrt{۱+\frac{۳}{n}}+۱}$ وقتی n زیاد می‌شود مخرج کسر بزرگ‌تر و در نتیجه مقدار کسر کوچک‌تر می‌شود پس دنباله نزولی است.

۲۶- **گزینه۴** تابع $y=xf(x)=x\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ مجانب قائمی به معادله‌ی $x=2$ دارد. برای پیداکردن معادله‌ی مجانب مایل تابع از روش تقسیم و هم‌ارزی استفاده می‌کنیم:

$$y=\sqrt{\frac{x^3+x^2}{x-2}} \Rightarrow y=\sqrt{x^2+3x}$$

$$\Rightarrow y=|x+\frac{3}{2}| \Rightarrow y=x+\frac{3}{2}$$ مجانب مایل

پس نقطه‌ی تقاطع دو مجانب $(2,\frac{7}{2})$ است.

۲۷- **گزینه۲** اگر خط $y=-3x+2$ بخواهد بر منحنی $y=\frac{x^2+a}{x-2}$ مماس شود باید معادله‌ی حاصل از تقاطع آن دو، ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

$$\begin{cases} y=\frac{x^2+a}{x-2} \\ y=-3x+2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2+a}{x-2}=-3x+2$$

$$\Rightarrow x^2+a=-3x^2+2x+6x-4 \Rightarrow 4x^2-8x+a+4=0$$

$$\Delta=0 \Rightarrow (64-4(4)(a+4))=0 \Rightarrow 4-a-4=0 \Rightarrow a=0$$

۲۸- **گزینه۲** مشتق تابع $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ را در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{3}$، یعنی همان شیب خط مماس را پیدا می‌کنیم:

$$y'=\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}=\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}$$

$$x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow m=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

حالا $\tan\alpha$ را با استفاده از فرمول زاویه‌ی بین دو خط به دست می‌آوریم:

$$\tan\alpha=|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}|=|\frac{\frac{2}{3}-1}{1+(\frac{2}{3})(1)}|=\frac{1}{5}=0/2$$

۲۹- **گزینه۳** از $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-9}{h}=\frac{3}{2}$ نتیجه می‌گیریم اولاً $f(2)=9$ و ثانیاً $f'(2)=\frac{3}{2}$، حالا مشتق تابع $g(x)=x\sqrt{f(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

$$g'(x)=\sqrt{f(x)}+\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\times x$$

$$g'(2)=\sqrt{f(2)}+\frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}}\times 2=3+\frac{\frac{3}{2}}{2\times 3}\times 2=\frac{7}{2}=3/5$$

۳۰- **گزینه۱** مشتق تابع را به دست می‌آوریم و تعیین علامت می‌کنیم.

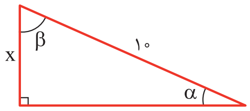
$$y=(x-1)^2\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y'=2(x-1)\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(x-1)^2$$

$$=\frac{2(x-1)(3x)+2(x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{2(x-1)(3x+x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

ریشه‌های صورت مشتق، $x=1$ و $x=\frac{1}{4}$ هستند و چون می‌دانیم $x=1$ طول نقطه‌ی مینیمم منحنی است (چرا؟) پس طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی برابر $\frac{1}{4}$ است.

۳۱- **گزینه۲** در مثلث روبه‌رو داریم:

$$\sin\alpha=\frac{x}{10} \Rightarrow x=10\sin\alpha$$



از طرفی مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}(10)(x)\sin\beta=\frac{1}{2}(10)(10\sin\alpha)\cos\alpha$$

$$\Rightarrow S=50\sin\alpha\cos\alpha=25\sin 2\alpha$$

حالا از رابطه‌ی مساحت نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dS}{dt}=50\cos 2\alpha\frac{d\alpha}{dt} \xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{6}} \frac{dS}{dt}=50(\frac{1}{2})(\frac{1}{20})=1/25$$

۳۲- **گزینه۳** منحنی تابع $y=\frac{x^2+a}{x^2+bx+c}$ دارای مجانب قائمی به معادله‌ی $x=1$ و با انفصال مضاعف است پس مخرج تابع باید به صورت x^2-2x+1 باشد یعنی $b=-2$ و $c=1$، از طرفی مشتق تابع باید در $x=-2$ برابر صفر شود، پس:

$$y=\frac{x^2+a}{(x-1)^2} \Rightarrow y'=\frac{2x(x-1)^2-2(x-1)(x^2+a)}{(x-1)^4}$$

$$x=-2 \Rightarrow -4(-3)^2-2(-3)(4+a)=0$$

$$\Rightarrow 2(-3)(6-4-a)=0 \Rightarrow a=2$$

۳۳- **گزینه۴** مقدار میانگین تابع در بازه‌ی $[a,b]$ را از رابطه‌ی $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{\int_2^a \frac{x^2+4}{x^2}dx}{a-2}=\frac{\int_2^a (1+\frac{4}{x^2})dx}{a-2}=\frac{x-\frac{4}{x}\Big|_2^a}{a-2}$$

$$=\frac{(a-\frac{4}{a})-(2-\frac{4}{2})}{a-2}=\frac{a^2-4}{a(a-2)}=\frac{a+2}{a}$$

پس $\frac{a+2}{a}$ باید برابر $\frac{5}{4}$ باشد: $\frac{a+2}{a}=\frac{5}{4} \Rightarrow 4a+8=5a \Rightarrow a=8$

۳۴- **گزینه۴** همان‌طور که در درس‌نامه داشتیم $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ و $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dx}{1+\cos x}=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}(1+\tan^2\frac{x}{2})dx=$$

$$\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{3}-0=\sqrt{3}$$