

سوالات کنکور سراسری داخل ۹۵

۱- در یک دنباله‌ی اعداد $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ، جمله‌ی هشتم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱۲۷ (۲) ۱۵۹ (۳) ۲۴۷ (۴) ۲۵۵

۲- مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ ، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۳

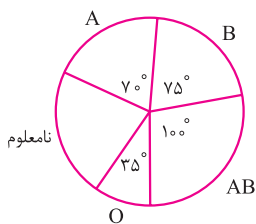
۳- از معادله‌ی لگاریتمی $\log_2(2x^2 + 1) - \log_2(x + 2) = 1$ ، مقدار لگاریتم $(2x - 1)$ در پایه‌ی ۸ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، وارون ماتریس $A \times B$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$ (۲) $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ (۳) $\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & -8 \end{bmatrix}$ (۴) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -9 & -8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

۵- نمودار دایره‌ای روبه‌رو، متناسب با تعداد کارکنان سازمانی با گروه خونی متمایز است. گروه خونی ۳۲ نفر از آنان



تعیین نشده است. چند نفر از آن‌ها دارای نوع خون B هستند؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۳۶

۶- میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات $\frac{0}{2}$ محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

- (۱) ۲۲۹ (۲) ۲۳۲ (۳) ۲۳۴ (۴) ۲۳۶

۷- هر یک از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ بر روی پنج کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف سه کارت از آن‌ها را کنار هم قرار می‌دهیم، با کدام احتمال عدد

سه‌رقمی حاصل، مضرب ۳ می‌باشد؟

- (۱) $\frac{0}{3}$ (۲) $\frac{0}{4}$ (۳) $\frac{0}{5}$ (۴) $\frac{0}{6}$

۸- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|\frac{2-x}{2x-3}| > 1$ ، به صورت کدام بازه است؟

- (۱) $(1, \frac{3}{2})$ (۲) $(1, \frac{5}{3}) - \{\frac{3}{2}\}$ (۳) $(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$ (۴) $(\frac{5}{3}, 2)$

۹- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\cos(\frac{\sqrt{3}\pi}{4} - 2\alpha)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۰- اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشد، مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله‌ی $y = 3$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) ۶

۱۱- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ باشد، آن‌گاه حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow -1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۱۲- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) هیچ مقدار a

۱۳- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}})^2$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ کدام است؟

- (۱) -۲۱ (۲) -۱۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۱۴- احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر $\frac{0}{9}$ و برای شخص B برابر $\frac{0}{8}$ است. با کدام احتمال، لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر

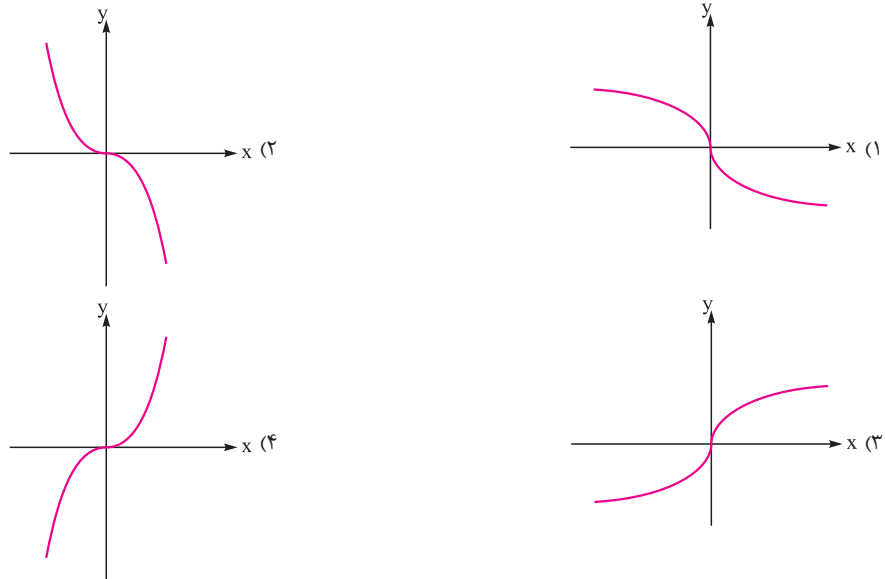
موفقیت‌آمیز است؟

- (۱) $\frac{0}{92}$ (۲) $\frac{0}{94}$ (۳) $\frac{0}{96}$ (۴) $\frac{0}{98}$

۱۵- آزمایشی فقط دو نتیجه دارد و احتمال پیروزی در هر بار $\frac{3}{4}$ است. در تکرار ۶ بار این آزمایش مستقل، احتمال ۴ پیروزی چند برابر احتمال ۳ پیروزی است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{9}{4}$

۱۶- اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟



۱۷- در یک دنباله هندسی نزولی، هر جمله‌ی آن نصف مجموع تمام جملات بعدی است. قدرنسبت آن کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۱۸- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ ، کدام است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

۱۹- از نقطه‌ی $A(0, \frac{4}{5})$ خطی بر منحنی $y = x^2$ عمود شده است. طول پای عمود با علامت مثبت کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $2/5$

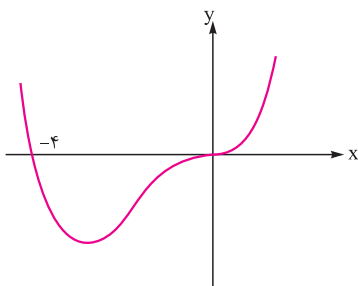
۲۰- در نقطه‌ای از منحنی به معادله‌ی $x + \sqrt{xy} + y = 12$ ، خط مماس بر منحنی، عمود بر نیمساز ربع اول است. طول نقطه‌ی تماس کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۲۱- مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ در بازه‌ی $[-4, 3]$ کدام است؟

- (۱) -18 و 24 (۲) -45 و 27 (۳) -36 و 27 (۴) -27 و 36

۲۲- شکل روبرو نمودار تابع $f(x) = x^4 + ax^3 + bx$ است. با تعیین مقادیر a و b ، مینیمم تابع کدام است؟



- (۱) -36 (۲) -32 (۳) -27 (۴) -24

۲۳- دایره‌ای به مرکز $(2, -1)$ و مماس بر خط به معادله‌ی $x - y = 1$ ، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) ۳ و ۱ (۲) ۴ و ۱ (۳) ۳ و ۲ (۴) ۴ و $1/5$

۲۴- به ازای کدام مقدار k ، خروج از مرکز هذلولی به معادله‌ی $4y = 4 - 2y^2 + kx^2$ ، برابر $\sqrt{3}$ است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۵- حاصل $\int_{-1}^1 (|3x| - [x]) dx$ کدام است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) ۴

۲۶- اگر $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})}{x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) + C$ باشد، آن گاه $f(x)$ کدام است؟

$x+2$ (۴)

$x-2$ (۳)

$2x-1$ (۲)

$2x+2$ (۱)

۲۷- در دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین با زاویه‌ی ۶۰ درجه، قاعده‌ی کوچک‌تر برابر ساق آن است. اگر محیط این دوزنقه ۳۰ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

۵۴ (۴)

۴۸ (۳)

$27\sqrt{3}$ (۲)

$24\sqrt{3}$ (۱)

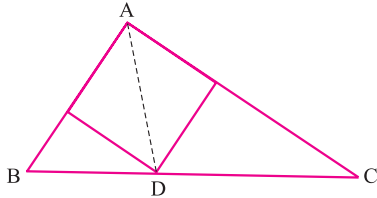
۲۸- در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه کدام است؟

$1/4\sqrt{2}$ (۱)

$2/1$ (۲)

$2/8$ (۳)

$2/1\sqrt{2}$ (۴)



۲۹- در دوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟

۲۸ (۴)

۲۴ (۳)

۲۰ (۲)

۱۸ (۱)

۳۰- در یک مکعب به طول یال ۴ واحد، بر انتهای سه یال گذرا بر یک رأس صفحه‌ای می‌گذرد. مساحت مقطع این صفحه با مکعب کدام است؟

$8\sqrt{3}$ (۴)

۱۲ (۳)

$4\sqrt{6}$ (۲)

۸ (۱)

در اطراف $\frac{3}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ مخرج صفر است و جواب کسر $\pm\infty$ می‌شود که قدرمطلقش حتماً از ۱ بیشتر است پس پاسخ شامل دو طرف $\frac{3}{4}$ باید باشد که فقط $\{(\frac{3}{4}, \frac{5}{3}) - (\frac{3}{4}, 1)\}$ می‌خورد. اما حل:

$$\rightarrow \text{به توان } 2 \rightarrow 4 - 4x + x^2 > 4x^2 - 12x + 9$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 8x + 5 < 0 \rightarrow \text{بین دو ریشه} \rightarrow (1, \frac{5}{3}) - \{\frac{3}{4}\}$$

۹- گزینه‌ی ۱

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{به توان } 2} 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$1 \pm \sin 2\alpha = (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2$$

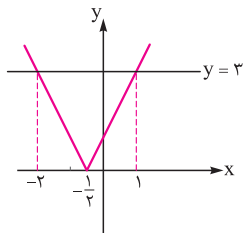
$$\cos(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha) \xrightarrow{\text{ربع سوم}} = -\sin 2\alpha = -\frac{3}{4} \quad \text{حالا خواسته‌ی سؤال:}$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ ضابطه را بسازیم:

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = \sqrt{4(x^2 + x) + 1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$$

$$= \sqrt{(2x+1)^2} \Rightarrow y = |2x+1|$$

حالا سطح محصور به gof و خط $y=3$:



$$|2x+1| = 3 \Rightarrow 2x+1 = \pm 3 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } -2$$

$$\Rightarrow S = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

۱۱- گزینه‌ی ۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \xrightarrow{\text{پرتوان}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+2x}{2x} = \frac{a+2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \frac{0}{0} \quad \text{حالا:}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 5}}}{2} = \frac{3 + \frac{-8}{2(2)}}{2} = \frac{3 - 4}{2} = \frac{5}{6}$$

۱۲- گزینه‌ی ۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - (1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2})}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{4}}{x^2} = -\frac{1}{4}$$

حد خواسته‌شده همان $f'(2)$ است:

$$f(x) = (\frac{x+2}{2x-3})^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (\frac{x+2}{2x-3})^{-\frac{1}{2}} (\frac{x+2}{2x-3})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{-3-4}{(2x-3)^2} \sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}$$

$$\xrightarrow{x=2} f'(2) = \frac{1}{2} (-7)(2) = -7$$

۱۳- گزینه‌ی ۱

۱- گزینه‌ی ۴ رابطه‌ی $a_n = 2a_{n-1} + 1$ یعنی هر جمله از دو برابر قبلی یک واحد بیشتر است پس: $1, 3, 7, 15, \dots$

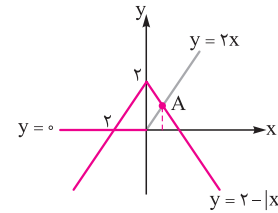
با کمی دقت، جمله‌ها از الگوی $2^n - 1$ به دست می‌آیند پس:

$$a_8 = 2^8 - 1 = 255$$

۲- گزینه‌ی ۳ نمودارهای $y_1 = x + |x|$ و $y_2 = 2 - |x|$ را رسم

$$2 - x = 2x \Rightarrow x_A = \frac{2}{3}$$

کنیم



مساحت مثلث در ربع دوم $\frac{2 \times 2}{2}$ و مساحت مثلث در ربع اول $\frac{2 \times \frac{2}{3}}{2}$ است و جمع آن‌ها $\frac{4}{3}$ است.

۳- گزینه‌ی ۴ $\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1$

$$\Rightarrow \log_3 \frac{2x^2 + 1}{x + 2} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} \frac{2x^2 + 1}{x + 2} = 3^1 = 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 1 = 3x + 6 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \log_8(2x - 1) = \log_8 4 = \frac{2}{3}$$

۴- گزینه‌ی ۱ اول $A \times B$ را حساب کنیم:

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{|C|} C^*$$

$$C^{-1} = \frac{1}{-24 + 21} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

۵- گزینه‌ی ۲ جمع زاویه‌ها باید 360° شود پس زاویه‌ی گروه

مجهول 80° است و داریم:

تعداد زاویه

$$80^\circ \quad 32 \Rightarrow ? = f_B = \frac{75 \times 32}{80} = 30$$

گروه 75° ?

۶- گزینه‌ی ۳ $CV = 0/2 = \frac{\sigma}{x} = \frac{\sigma}{15} \Rightarrow \sigma = 3 \Rightarrow \sigma^2 = 9$

حالا از فرمول واریانس با مجموع مجزورات استفاده کنیم:

$$9 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - 15^2 \Rightarrow \bar{S} = 9 + 225 = 234$$

۷- گزینه‌ی ۲

$$n(S) = \binom{5}{3} = 10$$

ده انتخاب را ببینید:

$$S = \{123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345\}$$

$$A = \{123, 135, 234, 345\}$$

زیر عضوایی که مجموع ارقام به ۳ می‌خورد خط کشیدیم، پس $n(A) = 4$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{10} = 0.4$$

۸- گزینه‌ی ۲ $|\frac{2-x}{2x-3}| > 1$

گزینه ۴ - ۱۴

$$P(\text{حداقل یکی}) = P(A \cup B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\xrightarrow{\text{مستقل}} = 0/9 + 0/8 - 0/9 \times 0/8 = 0/98$$

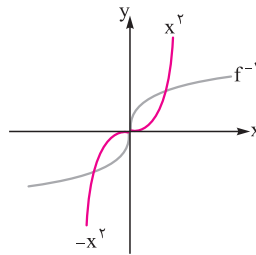
$$P(\text{حداقل یکی}) = 1 - P(\text{هیچ کدام}) = 1 - 0/2 \times 0/1 = 1 - 0/2 = 0/98$$

گزینه ۴ - ۱۵

$$\frac{P(4 \text{ تا پیروزی})}{P(3 \text{ تا پیروزی})} = \frac{\binom{6}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\binom{6}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{15 \times 3 \times 1}{20 \times 4 \times \frac{1}{4}} = \frac{9}{4}$$

گزینه ۳ - ۱۶ نمودار $y = x|x|$ را بلدیم:

نمودار f^{-1} هم به راحتی با قرینه کردن f نسبت به خط $y = x$ به دست می آید.



گزینه ۳ - ۱۷

هر جمله نصف جمالت بعدی است یعنی:

$$a_1 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3 + \dots)$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{2} \frac{a_2}{1-q} \Rightarrow a_1 = \frac{qa_1}{2(1-q)}$$

$$\Rightarrow 2 - 2q = q \Rightarrow 2 = 3q \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

گزینه ۱ - ۱۸

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 - 3A - 2 = 0 \Rightarrow (2A+1)(A-2) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = A = \frac{-1}{2} \text{ یا } 2 \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

از اول با دقت به این که $\cos x$ حتماً باید منفی باشد، گزینه‌ها را

امتحان کنیم.

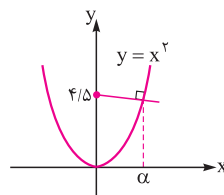
گزینه ۲ - ۱۹

اگر طول پای قائم α باشد، مختصات آن

(α, α^2) و شیب قائم $m = -\frac{1}{f'(\alpha)} = -\frac{1}{2\alpha}$ است و معادله آن

$$y - \alpha^2 = \frac{-1}{2\alpha}(x - \alpha)$$

$$4/5 - \alpha^2 = \frac{-1}{2\alpha}(0 - \alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha^2 = 4 \xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = 2$$



گزینه ۳ - ۲۰

$$x + \sqrt{xy} + y = 12 \Rightarrow \text{شیب مماس} = y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{1 + \frac{y}{2\sqrt{xy}}}{\frac{x}{2\sqrt{xy}} + 1}$$

سؤال می خواهد مماس، بر نیمساز ربع اول عمود شود پس شیب آن باید -1 باشد:

$$y' = -1 \Rightarrow \frac{1 + \frac{y}{2\sqrt{xy}}}{\frac{x}{2\sqrt{xy}} + 1} = 1$$

واضح است که این رابطه با شرط $y = x$ برقرار است و داریم:

$$\xrightarrow{y=x} x + \sqrt{xx} + x = 12 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

گزینه ۲ - ۲۱

$$y = \frac{1}{3}x^2 - x^2 - 15x$$

$$y' = x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ یا } -3$$

اول نقاط بحرانی را پیدا کنیم: $x = 5$ یا -3 که در بازه $[-4, 3]$ نیست پس فقط $x = -3$ را قرار می دهیم:

x	-4	-3	3
y	...	27	-45

گزینه ۳ - ۲۲

شکل می گوید در $x = 0$ عطف افقی داریم پس

$$\text{شکل } f(x) = x^4 + ax^3 \text{ در } x = 0 \text{ تابع } f(0) = f'(0) = 0$$

می گوید $f(-4) = 0$ پس $a = 4$ و داریم:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y_{\min} = f(-3) = -27$$

گزینه ۱ - ۲۳

مرکز در $O(2, -1)$ است و خط $x - y = 1$ مماس

بر آن است، پس فاصله‌ی مرکز از خط مماس شعاع دایره را مشخص می کند:

$$R = \text{فاصله‌ی مرکز از مماس} = \frac{|2 - (-1) - 1|}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow R = \sqrt{2}$$

معادله‌ی دایره $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$ است.

$$\xrightarrow{y=0} (x-2)^2 = 1 \Rightarrow x = 2 \pm 1 = 1 \text{ یا } 3$$

با توجه به شکل، وسط دو نقطه‌ی برخورد در $x = 2$ است که فقط به



$x = 1, 3$ می خورد.

گزینه ۴ - ۲۴

برای به دست آوردن خروج از مرکز هذلولی،

معادله را به صورت استاندارد می نویسیم:

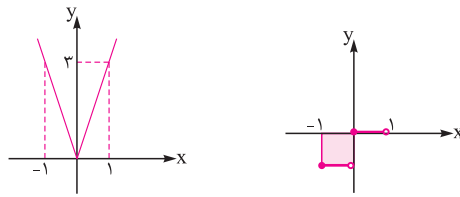
$$kx^2 - 2y^2 + 4y = 4 \Rightarrow kx^2 - 2(y^2 - 2y) = 4$$

$$\Rightarrow kx^2 - 2(y-1)^2 = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{2}{k}} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{2}{k}, b^2 = 1$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{\frac{2}{k}}} = \sqrt{1 + \frac{k}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{k}{2} = 2 \Rightarrow k = 4$$

گزینه ۴ - ۲۵

$$\int_{-1}^1 (|2x| - [x]) dx = \int_{-1}^1 |2x| dx - \int_{-1}^1 [x] dx = 2 \times \frac{1 \times 2}{2} - (-1) = 4$$



گزینه ۱ - ۲۶

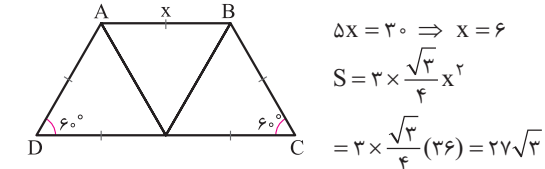
$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})}{x^2} dx = \int \frac{x\sqrt{x} - x + x - \sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx$$

$$\xrightarrow{\text{تفکیک}} = \int (x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}) dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C = \frac{1}{\sqrt{x}} (2x + 2) + C$$

گزینه ۳ - ۲۷

با توجه به شکل زیر، دوزنقه از ۳ مثلث متساوی الاضلاع ساخته شده و محیط آن Δx است. پس:



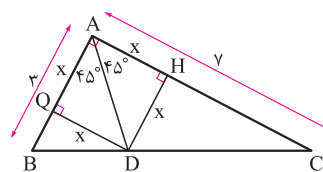
گزینه ۴ - ۲۸

اگر از پای نیمساز (یعنی نقطه‌ی D) به ضلع قائم عمود DH را رسم کنیم، با توجه به شکل، مثلث AHD قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. حالا با استفاده از تالس:

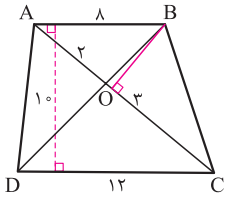
$$\frac{DH}{AB} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y-x}{y}$$

$$\Rightarrow 7x = 21 - 3x \Rightarrow 10x = 21 \Rightarrow x = 2.1$$

$$\Rightarrow AD = x\sqrt{2} = 2.1\sqrt{2}$$



گزینه ۳ - ۲۹



$$S = \frac{(8+12) \times 10}{2} = 100, S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60 \Rightarrow S_{\Delta AOB} = 40$$

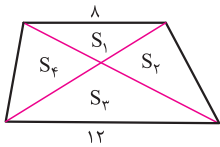
$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{2}{5} S = \frac{2}{5} \times 100 = 40$$

حالا داریم:

از طرفی دو مثلث AOB و COD به نسبت $k = \frac{OA}{OC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ متشابه‌اند، پس $\frac{S_{OAB}}{S_{OBC}} = \frac{AO}{OC} = \frac{2}{3}$ (نسبت مساحت‌ها همان نسبت قاعده‌ها بود).

$$\Rightarrow S_{OBC} = \frac{3}{5} S_{ABC} = \frac{3}{5} \times 40 = 24$$

طبق قضیه‌ی پروانه داریم:



$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{8}{12}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow S_1 = 4x, S_2 = 9x$$

$$\Rightarrow S_2 = \sqrt{S_1 S_3} = \sqrt{4x \cdot S_3} = 2\sqrt{x S_3}$$

$$S_{کل} = 9x + 6x + 4x + 6x = 25x \Rightarrow S_{OBC} = 6x$$

$$= \frac{6}{25} S_{کل} = \frac{6}{25} \times 100 = 24$$

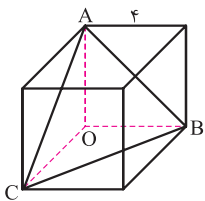
گزینه ۴ - ۳۰

سه یال گذرنده بر رأس O را می‌بینیم. صفحه‌ی

ABC از انتهای سه یال گذشته است. می‌دانیم مثلث ABC متساوی‌الاضلاع

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} (4\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{3}$$

و ضلع آن $4\sqrt{2}$ است پس:



سوالات کنکور سراسری خارج ۹۵

۱- در یک دنباله‌ی اعداد $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} - 2$ حاصل $a_8 - a_7$ ، کدام است؟

- ۳۲ (۱) ۴۸ (۲) ۵۶ (۳) ۶۴ (۴)

۲- مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{4}x$ کدام است؟

- $\frac{8}{3}$ (۱) ۴ (۲) $\frac{16}{3}$ (۳) ۶ (۴)

۳- از معادله‌ی لگاریتمی $\log(2x - 5) = \log(x - 2) - \log(x^2 - x - 6)$ ، مقدار لگاریتم $\sqrt{x+1}$ در پایه‌ی ۴ کدام است؟

- $\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴)

۴- اگر $A = \begin{bmatrix} a & -3 \\ 5 & a+2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، به ازای کدام مقدار a ماتریس $A + 2B$ وارون پذیر نیست؟

- ۷، ۵ (۱) -۵، ۷ (۲) -۷، ۴ (۳) -۳، ۵ (۴)

۵- در نمودار جعبه‌ای ۲۳ داده‌ی آماری، میانگین دنباله‌های سمت چپ و سمت راست به ترتیب $\frac{21}{6}$ و ۳۳ و میانگین داده‌های داخل و روی جعبه ۲۵ می‌باشد. میانگین کل این داده‌ها کدام است؟

- $\frac{25}{8}$ (۱) ۲۶ (۲) $\frac{26}{1}$ (۳) $\frac{26}{2}$ (۴)

۶- در ۳۰ داده‌ی آماری، مجموع تمام داده‌ها برابر ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده‌ها ۲۱۹۰ می‌باشد. ضریب تغییرات کدام است؟

- $\frac{0}{225}$ (۱) $\frac{0}{275}$ (۲) $\frac{0}{325}$ (۳) $\frac{0}{375}$ (۴)

۷- دو تاس را با هم می‌اندازیم، با کدام احتمال دو عدد روده، متوالی هستند؟

- $\frac{2}{9}$ (۱) $\frac{5}{18}$ (۲) $\frac{7}{18}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴)

۸- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x^2 + 1| > |x - 2| - |x + 1|$ ، به صورت کدام بازه‌ها است؟

- (-۲، ۱) (۱) (-۱، ۱) (۲) (-۱، ۲) (۳) (۱، ۲) (۴)

۹- اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4})$ کدام است؟

- ۲ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴)

۱۰- اگر $g(x) = 2x + 1$ و $f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

- $2x^2 + 3x + 1$ (۱) $2x^2 - 2x + 3$ (۲) $2x^2 - x + 4$ (۳) $2x^2 + x + 3$ (۴)

۱۱- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه b کدام است؟

- ۲ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

۱۲- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) هیچ مقدار a (۴)

۱۳- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{\frac{4x + 5}{x + 3}}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

- $\frac{7}{48}$ (۱) $\frac{5}{24}$ (۲) $\frac{7}{24}$ (۳) $\frac{7}{16}$ (۴)

۱۴- در جعبه‌ای ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و ۲ مهره‌ی قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال فقط یکی از مهره‌ها سفید است؟

- $\frac{1}{21}$ (۱) $\frac{17}{42}$ (۲) $\frac{10}{21}$ (۳) $\frac{9}{14}$ (۴)

۱۵- احتمال جوانه‌زدن هر دانه‌ی نوعی بذر، $\frac{2}{3}$ است. اگر ۴ دانه از این بذر در شرایط یکسان کاشته شوند، با کدام احتمال حداقل سه دانه، جوانه می‌زند؟

- $\frac{44}{81}$ (۱) $\frac{15}{27}$ (۲) $\frac{46}{81}$ (۳) $\frac{16}{27}$ (۴)

کنکورهای ۹۵

۱۶- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x^x|$ با دامنه‌ی \mathbb{R} ، چگونه است؟

- (۱) نزولی (۲) صعودی (۳) وارون ناپذیر (۴) یک‌به‌یک

۱۷- در یک دنباله‌ی هندسی نزولی، مجموع مجذورات تمام جملات، برابر $\frac{2}{3}$ مجذور مجموع تمام جملات آن است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) $0/2$ (۲) $0/25$ (۳) $0/3$ (۴) $0/4$

۱۸- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{1}{4} = \cos(x + \frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4})$ ، کدام است؟

- (۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱۹- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 + \cos x} & x > 0 \\ \sin 2x & x \leq 0 \end{cases}$ مقدار $f'_-(0) - f'_+(0)$ کدام است؟

- (۱) $0/75$ (۲) 1 (۳) $1/25$ (۴) $1/5$

۲۰- در نقاطی از منحنی به معادله‌ی $x^2 - 4xy + 3y^2 + 1 = 0$ ، خط مماس بر منحنی موازی محور x ها است. طول نقاط تماس کدام است؟

- (۱) -2 و 1 (۲) 2 و -2 (۳) 1 و -1 (۴) 2 و -1

۲۱- اگر $A(1, -1)$ نقطه‌ی عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ باشد، آن‌گاه مقدار $f(-1)$ کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

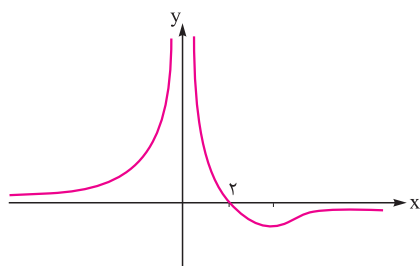
۲۲- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = \frac{ax+2}{x^2+b}$ است. با تعیین a و b ، می‌نیمم نسبی این تابع کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{8}$

- (۲) $-\frac{1}{4}$

- (۳) $-\frac{3}{8}$

- (۴) $-\frac{1}{2}$



۲۳- دایره‌ای، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های 1 و 3 قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) 2 (۳) $\sqrt{5}$ (۴) 3

۲۴- در یک هذلولی افقی، معادله‌ی مجانب‌ها به صورت $y = 2x - 4$ و $y = -2x$ می‌باشند. خروج از مرکز این هذلولی کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{5}$

۲۵- حاصل $\int_{-1}^2 [x] |x| dx$ کدام است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) 1 (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) 2

۲۶- اگر $\int \frac{\Delta x^2 + 3x}{\sqrt{x}} dx = x\sqrt{x}f(x) + C$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $x+2$ (۲) $x+3$ (۳) $2x+2$ (۴) $2x+3$

۲۷- در مثلثی اندازه‌های دو ضلع 10 و 15 واحد است. مجموع ارتفاع‌های وارد بر این دو ضلع، برابر ارتفاع ضلع سوم است. اندازه‌ی ضلع سوم کدام است؟

- (۱) 6 (۲) 7 (۳) $7/5$ (۴) 8

۲۸- مساحت یک شش‌ضلعی منتظم، برابر $9\sqrt{3}$ واحد مربع است. اندازه‌ی قطر کوچک آن کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{6}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) 3

۲۹- درون مثلثی به اضلاع 9 ، 7 و 5 واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد، اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث

6 واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

- (۱) $0/75$ (۲) 1 (۳) $1/25$ (۴) $1/5$

۳۰- مساحت مقطع یک مکعب با صفحه‌ی قطری آن برابر $9\sqrt{2}$ می‌باشد. اندازه‌ی قطر مکعب کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{6}$ (۴) $3\sqrt{3}$

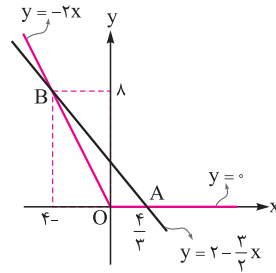
۱- **گزینه ۴**

از رابطه $a_n = 2a_{n-1} - 2$ می‌گوییم هر جمله دو واحد کم‌تر از دو برابر قبلی است، پس جملات عبارت‌اند از: $3, 4, 6, 10, 18, 34, 66, \dots$ ؛ با کمی دقت جمله n ام به صورت $a_n = 2^{n-1} + 2$ است. بنابراین اختلاف جملات هشتم و هفتم برابر است با:

$$a_8 - a_7 = 2^7 + 2 - (2^6 + 2) = 2^7 - 2^6 = 64$$

۲- **گزینه ۳**

ضابطه $y = |x| - x$ را به صورت $y = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$ می‌نویسیم. حالا با توجه به شکل، محل‌های تلاقی دو نمودار در نقاط $A(\frac{4}{3}, 0)$ و $B(-4, 8)$ هستند و داریم:



$$S_{\triangle OAB} = \frac{\frac{4}{3} \times 8}{2} = \frac{16}{3}$$

۳- **گزینه ۲**

اگر طرف چپ را به صورت لگاریتم تقسیم بنویسیم و \log ها را بزنیم، داریم:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 2x - 5$$

اما طرف چپ این تساوی ساده می‌شود:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = x+2 = 2x-5 \Rightarrow x=7$$

بنابراین:

$$\log_4 \sqrt[3]{x+1} = \log_4 \sqrt[3]{7+1} = \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

۴- **گزینه ۱**

اول ماتریس $A + 2B$ را بسازیم:

$$A + 2B = \begin{bmatrix} a & -3 \\ 5 & a+2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-2 & 3 \\ 9 & a+4 \end{bmatrix}$$

این ماتریس وقتی وارون‌پذیر نیست که دترمینانش صفر باشد:

$$|A + 2B| = \begin{vmatrix} a-2 & 3 \\ 9 & a+4 \end{vmatrix} = (a-2)(a+4) - 3(9) = a^2 + 2a - 8 - 27$$

$$= a^2 + 2a - 35 = 0 \Rightarrow (a+7)(a-5) = 0 \Rightarrow a = -7, 5$$

۵- **گزینه ۲**

در بین ۲۳ داده، داده‌ی شماره‌ی ۱۲ $\frac{23+1}{2} = 12$ در وسط قرار دارد و میانه است. در هر طرف آن ۱۱ داده داریم که در بین آن‌ها داده‌ی ششمی وسط قرار می‌گیرد. پس چارک‌ها از هر طرف، ششمین داده هستند و در هر دنباله جعبه، ۵ داده داریم. بنابراین رو و درون جعبه ۱۳ داده قرار دارد. جمع داده‌ها در هر قسمت برابر است با تعداد ضربدر میانگین. پس داریم:

$$\bar{x} = \frac{5 \times 21/6 + 13 \times 25 + 5 \times 33}{23} = \frac{108 + 325 + 165}{23} = \frac{598}{23} = 26$$

۶- **گزینه ۴**

با داشتن مجموع مربعات، سراغ فرمول $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \bar{x}^2$ می‌رویم:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{30} 2190 - \left(\frac{240}{30}\right)^2 = 73 - 64 = 9$$

$$\Rightarrow \sigma = 3 \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{8} = 0.375$$

۷- **گزینه ۲**

در فضای نمونه‌ی ۳۶ عضوی این آزمایش، بیشامد $A = \{12, 21, 32, 23, 34, 43, 54, 45, 56, 65\}$ شامل حالت‌هایی است که دو رقم متوالی ظاهر شوند و احتمال برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

۸- **گزینه ۴**

در نامعادله‌ی صورت سؤال، $x = 0$ صدق نمی‌کند؛ پس گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ که شامل عدد صفرند، جواب نیستند! اما راه حل: چون در هیچ گزینه‌ی عدد بیشتر از ۲ نداریم، حتماً قدم‌مطلق از روی $x - 2$ با علامت منفی برداشته می‌شود و داریم:

$$2x + 1 + x - 2 > x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow 1 < x < 2$$

۹- **گزینه ۱**

ابتدا عبارت $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$ را ساده‌تر کنیم:

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$$

حالا خواسته‌ی سؤال: $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right) = -\cot \frac{\alpha}{4} = -\frac{1}{\tan \frac{\alpha}{4}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$

۱۰- **گزینه ۲**

راه عادی تغییر متغیر و حل ضابطه‌ی fog است:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5$$

$\frac{2x+1=t}{x=\frac{t-1}{2}} \rightarrow f(t) = 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5$

$$= 8\left(\frac{t^2 - 2t + 1}{4}\right) + 3(t-1) + 5 = 2(t^2 - 2t + 1) + 3t - 3 + 5$$

$$= 2t^2 - t + 4$$

در صورت سؤال، $x = 0$ را قرار دهیم:

$(fog)(0) = f(g(0)) = f(2(0)+1) = f(1) = 5$ که به ازای $x = 1$ مقدار آن بشود ۵ که فقط به گزینه‌ی ۳ می‌خورد.

۱۱- **گزینه ۲**

با قراردادن مقدار x ، صورت کسر صفر است، پس منخرج هم باید صفر باشد تا به جوابی غیرصفر برسیم. سپس هوپیتال می‌گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{2 - \sqrt{6-2}}{2a+b} = \frac{0}{2a+b} = \frac{0}{0} \Rightarrow 2a+b=0$$

$$\xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{a} = \frac{\frac{1}{4}}{a} = \frac{1}{4a}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4} \xrightarrow{2a+b=0} b = -1$$

۱۲- **گزینه ۴**

با استفاده از هم‌ارزی در اطراف صفر، حد ضابطه‌ی بالا را حساب می‌کنیم و برای پیوستگی باید مقدار a نیز برابر این حد باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$$

پس تابع در این نقطه حد ندارد و با هیچ انتخابی از a پیوسته نخواهد شد.

گزینه‌ی ۱ -۱۳

حد خواسته شده در صورت سؤال همان $f'(1)$ است. پس از تابع رادیکالی مشتق می‌گیریم و $x=1$ را قرار می‌دهیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{(x+3)(4)}}{\sqrt{x+3}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4}{2\sqrt{x+3}} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{(x+3)^2} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{x+3}}}{(x+3)^2}$$

$$x=1 \rightarrow f'(1) = \frac{\frac{3}{2\sqrt{4}}}{2^2} = \frac{\frac{3}{4}}{4} = \frac{3}{16}$$

گزینه‌ی ۲ -۱۴

۳ مهره از ۹ مهره برمی‌داریم و می‌خواهیم فقط یک مهره از ۴ تا سفید انتخاب شود:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1} \binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{4 \times \frac{5!}{3!2!}}{\frac{9!}{3!6!}} = \frac{4 \times 10}{84} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

گزینه‌ی ۳ -۱۵

در $n=4$ آزمایش می‌خواهیم حداقل ۳ پیروزی داشته باشیم:

$$P(x \geq 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{4}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$$= 4 \left(\frac{1}{27}\right) \left(\frac{2}{3}\right) + 1 \left(\frac{16}{81}\right) = \frac{8}{27} + \frac{16}{81} = \frac{32}{81}$$

گزینه‌ی ۳ -۱۶

واضح است که در این تابع با تبدیل x به $-x$ قرینه‌ی آن، مقدار y تغییری نمی‌کند، پس تابع یک‌به‌یک نیست. مثلاً $f(1) = f(-1)$.

گزینه‌ی ۱ -۱۷

در دنباله‌ی هندسی $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$ مجذور جملات به صورت $a_1^2, a_1^2q^2, a_1^2q^4, a_1^2q^6, \dots$ است. با توجه به فرمول حد مجموع داریم:

$$a_1^2 + a_1^2q^2 + a_1^2q^4 + a_1^2q^6 + \dots = \frac{a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^2}{1-q^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^2}{1-q^2} \Rightarrow \frac{1}{1-q^2} = \frac{1}{1-q^2}$$

$$\Rightarrow 3(1-q)^2 = 2(1-q)(1+q) \Rightarrow 3-3q = 2+2q$$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{5} = 0.2$$

گزینه‌ی ۱ -۱۸

ابتدا بسط عبارات سمت چپ را می‌نویسیم:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cos^2 x - \frac{1}{2} \sin^2 x = \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

از $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$ داریم:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2 x - \sin^2 \frac{\pi}{4} = \cos^2 x - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

گزینه‌ی ۴ -۱۹

مشتق چپ را از ضابطه‌ی پایین حساب می‌کنیم و برای مشتق راست در صفر، فقط از عامل صفرشونده در صورت کسر، مشتق

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 + \cos x} & x > 0 \\ \sin 2x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = \frac{\cos 0}{1 + \cos 0} = \frac{1}{2} \\ f'_-(0) = 2 \cos 2 \times 0 = 2 \end{cases}$$

تفاضل آن‌ها می‌شود $2 - 0.5 = 1.5$.

گزینه‌ی ۲ -۲۰

مماس بر منحنی موازی محور افقی است؛ یعنی شیب مماس (مقدار مشتق) باید صفر شود:

$$x^2 - 4xy + 3y^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x - 4y}{-4x + 6y} = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{2}$$

این رابطه را در عبارت ضمنی داده‌شده قرار می‌دهیم تا طول نقاط تماس به دست آید:

$$x^2 - 4x\left(\frac{x}{2}\right) + 3\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$



معادله‌ی این دو خط مماس افقی به ترتیب $y = \pm 1$ است.

گزینه‌ی ۳ -۲۱

از این‌که نقطه‌ی $A(1, -1)$ عطف است، نتیجه می‌گیریم: $f'(1) = 0$, $f(1) = -1$ پس داریم:

$$1 + a + b = -1, 6 + 2a = 0$$

بنابراین $a = -3$, $b = -9$ و ضابطه‌ی تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ است و

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$$

در نتیجه:



چون تابع درجه‌سوم است، طول عطف آن را به راحتی با فرمول $x_1 = -\frac{B}{3A}$ نیز می‌توان یافت.

گزینه‌ی ۱ -۲۲

منحنی روی محور عرض‌ها مجانب قائم دارد، پس $b = 0$ ریشه‌ی مخرج صفر است و بنابراین:

هم‌چنین محور طول‌ها را در ۲ قطع کرده، پس $f(2) = \frac{2a+2}{4} = 0$ که از آن $a = -1$ نتیجه می‌شود:

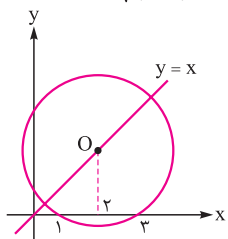
حالا ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x) = \frac{-x+2}{x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$ است و داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} = \frac{x-4}{x^3} = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y_{\min} = f(4) = -\frac{1}{8}$$

گزینه‌ی ۳ -۲۳

با توجه به شکل زیر، مرکز دایره روی خط $x=2$ قرار دارد؛ (چون عمودمنصف وتر از مرکز دایره می‌گذرد) پس حتماً $O(2, 2)$

است و داریم: $R = OA = \sqrt{(2-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$



گزینه‌ی ۴ -۲۴

شیب مجانب‌های مایل این هذلولی افقی برابر $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ است و داریم: $\pm \frac{b}{a} = \pm 2$

کوچک آن $a\sqrt{3}$ است، پس داریم: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a\sqrt{3})^2 = 9\sqrt{3}$

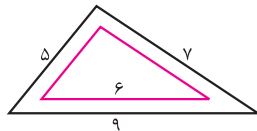
و از این رابطه طول قطر کوچک برابر است با: $a\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$

۲۹- **گزینه ۳** دو مثلث با هم به نسبت $k = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

متشابه‌اند. پس اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر S باشد، مساحت مثلث کوچک

$S' = k^2 S = \frac{4}{9} S$ است و سطح محصور بین آن‌ها برابر $\frac{5}{9} S$ خواهد بود و

نسبت سطح محصور بین آن‌ها به سطح مثلث کوچک‌تر می‌شود: $\frac{5}{9} = 1/25$.

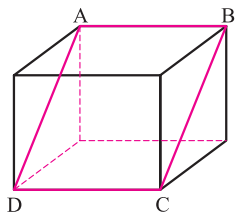


۳۰- **گزینه ۴** با توجه به شکل، مساحت مقطع مکعب با

صفحه‌ی قطری آن برابر است با $S = a \times a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$ که در صورت سؤال

$9\sqrt{2}$ داده شده است. پس $a^2 = 9$ و در نتیجه $a = 3$ و قطر مکعب برابر است

با $3\sqrt{3}$.



۲۵- **گزینه ۲** با تفکیک بازه‌ی انتگرال‌گیری، تکلیف قدرمطلق و

براکت را معلوم کنیم:

$$\int_{-1}^2 [x] |x| dx = \int_{-1}^0 [x] |x| dx + \int_0^1 [x] |x| dx + \int_1^2 [x] |x| dx$$

$$= \int_{-1}^0 (-1)(-x) dx + \int_0^1 (0)(x) dx + \int_1^2 (1)(x) dx$$

$$= \int_{-1}^0 x dx + \int_1^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 0 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} = 1$$

۲۶- **گزینه ۳** ابتدا کسر را تفکیک کرده و سپس از توان‌های

کسری استفاده می‌کنیم:

$$\int \frac{\Delta x^{\frac{5}{2}} + 3x}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{\Delta x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}} + \frac{3x}{\sqrt{x}} \right) dx = \int (\Delta x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}) dx$$

$$= \Delta \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 2x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + C = x^{\frac{3}{2}} (2x + 2) + C$$

۲۷- **گزینه ۱** می‌دانیم طول ارتفاع وارد بر ضلع x برابر $\frac{2S}{x}$

است، پس داریم: $h_a + h_b = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} = \frac{2S}{10} + \frac{2S}{15} = \frac{2S}{6}$

حالا سؤال می‌گوید مجموع این دو ارتفاع با ارتفاع سوم برابر است:

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2S}{6} \Rightarrow c = 6$$

پس طول ضلع سوم ۶ است.

۲۸- **گزینه ۲**

مساحت شش‌ضلعی منتظم $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$ است و طول قطر