سؤالات کنکور ۹۵

سؤالات کنکور داخل ۹۵

۱- در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع ۲/۵ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصله‌ی نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطه‌ی تقاطع، کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۵)*

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

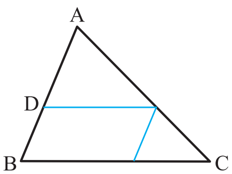
۲- در شکل روبه‌رو $\frac{3}{2}=\frac{DA}{DB}$. مساحت متوازی‌الاضلاع چند درصد مساحت مثلث ABC است؟ *(سراسری ریاضی ۹۵)*

۱) ۳۶

۲) ۴۰

۳) ۴۵

۴) ۴۸



۳- یک ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۲ و ۵ و ساق قائم ۳ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل، کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۵)*

۱) 36π ۲) 38π ۳) 39π ۴) 40π

۴- در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین با زاویه‌ی ۶۰ درجه، قاعده‌ی کوچک‌تر برابر ساق آن است. اگر محیط این ذوزنقه ۳۰ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۵)*

۱) $24\sqrt{3}$ ۲) $27\sqrt{3}$ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

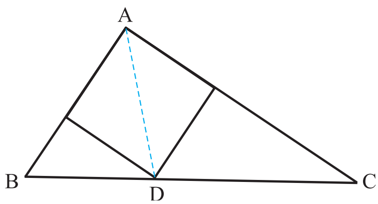
۵- در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه‌ی قائمه کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۵)*

۱) $1/4\sqrt{2}$

۲) ۲/۱

۳) ۲/۸

۴) $2/1\sqrt{2}$



۶- در ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟ *(سراسری تجربی ۹۵)*

۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۷- در یک مکعب به طول یال ۴ واحد، بر انتهای سه یال گذرا بر یک رأس صفحه‌ای می‌گذرد. مساحت مقطع این صفحه با مکعب کدام است؟ *(سراسری تجربی ۹۵)*

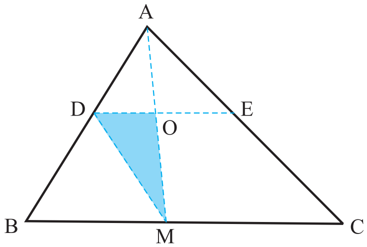
۱) ۸ ۲) $4\sqrt{6}$ ۳) ۱۲ ۴) $8\sqrt{3}$

سؤالات کنکور خارج ۹۵

۸- مربع ABCD به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره‌ی گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟ *(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۵)*

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

۹- در شکل زیر، نقطه‌ی M وسط BC و $\frac{DA}{DB}=\frac{۲}{۳}$ و $DE \parallel BC$ است، مساحت مثلث ODM چند درصد مساحت مثلث ABC است؟ *(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۵)*



۱) ۱۲
۲) ۱۵
۳) ۱۶
۴) ۱۸

۱۰- در هرم با قاعده‌ی مربع، یکی از یال‌ها عمود بر صفحه‌ی قاعده و بلندترین یال‌ها به طول ۶ واحد با تصویر خودش بر قاعده، زاویه‌ی ۶۰ درجه می‌سازد. حجم این هرم کدام است؟ *(سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۵)*

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۴/۵\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) $۷/۵\sqrt{۲}$

۱۱- در مثلثی اندازه‌های دو ضلع ۱۰ و ۱۵ واحد است. مجموع ارتفاع‌های وارد بر این دو ضلع، برابر ارتفاع ضلع سوم است. اندازه‌ی ضلع سوم کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۵)*

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۷/۵ ۴) ۸

۱۲- مساحت یک شش‌ضلعی منتظم، برابر $۹\sqrt{۳}$ واحد مربع است. اندازه‌ی قطر کوچک آن کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۵)*

۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۳

۱۳- درون مثلثی به اضلاع ۹، ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد، اگر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۵)*

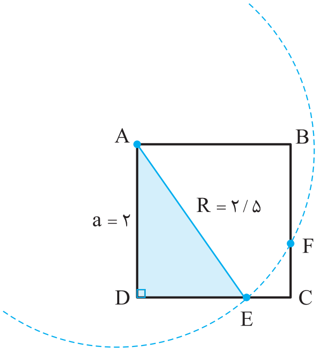
۱) ۰/۷۵ ۲) ۱
۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۵

۱۴- مساحت مقطع یک مکعب با صفحه‌ی قطری آن برابر $۹\sqrt{۲}$ می‌باشد. اندازه‌ی قطر مکعب کدام است؟ *(سراسری تجربی خارج از کشور ۹۵)*

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

پاسخ سؤالات کنکور ۹۵

۱- گزینه‌ی «۲» مطابق شکل به مرکز A و شعاع ۲/۵ واحد، دایره‌ای زده‌ایم تا ضلع BC را در F و ضلع DC را در E قطع کند. در مثلث ADE داریم:



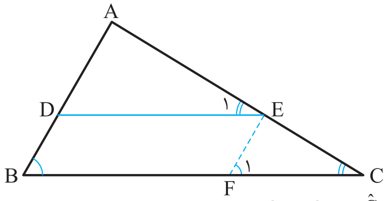
$$D = ۹۰^\circ \Rightarrow AE^۲ = AD^۲ + DE^۲$$

$$\Rightarrow ۲/۵^۲ = ۲^۲ + DE^۲ \Rightarrow DE = ۱/۵$$

بنابراین فاصله‌ی نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطه‌ی تقاطع عبارت است از طول پاره‌خط EC:

$$EC = DC - DE = ۲ - ۱/۵ = ۰/۵$$

۲- گزینه‌ی «۴» **راه‌اول** در شکل روبه‌رو از این‌که چهارضلعی DEFB متوازی‌الاضلاع است، نتیجه می‌گیریم $DE \parallel BC$ و $EF \parallel AB$.

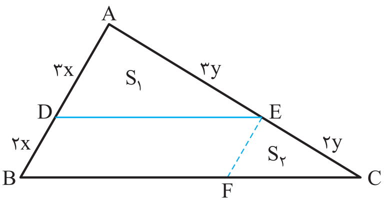


بنابراین طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب می‌توان گفت:

$$EF \parallel AB, BC: \text{مورب} \Rightarrow \hat{F}_۱ = \hat{B} \xrightarrow{\hat{C}=\hat{C}} \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{EFC} \qquad (۱)$$

$$DE \parallel BC, AC: \text{مورب} \Rightarrow \hat{E}_۱ = \hat{C} \xrightarrow{\hat{A}=\hat{A}} \overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC} \qquad (۲)$$

هم‌چنین در شکل فوق از $\frac{AD}{DB} = \frac{۳}{۲}$ و $DE \parallel BC$ می‌توان نتیجه گرفت $\frac{AE}{EC} = \frac{۳}{۲}$، پس فرض می‌کنیم $DB = ۲x$ و $AD = ۳x$ و هم‌چنین $EC = ۲y$ و $AE = ۳y$:



$$(۱) \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{EFC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = (\frac{EC}{AC})^۲ \Rightarrow \frac{S_۲}{S_{\text{کل}}} = (\frac{۲y}{۵y})^۲ = \%۱۶$$

$$(۲) \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = (\frac{AD}{AB})^۲ \Rightarrow \frac{S_۱}{S_{\text{کل}}} = (\frac{۳x}{۵x})^۲ = \%۳۶$$

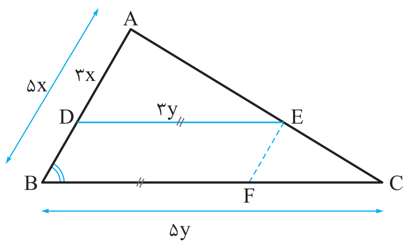
$$\Rightarrow S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = S_{\text{کل}} - S_۱ - S_۲ = S_{\text{کل}} - \frac{۱۶}{۱۰۰} S_{\text{کل}} - \frac{۳۶}{۱۰۰} S_{\text{کل}} = \frac{۴۸}{۱۰۰} S_{\text{کل}}$$

راه‌دوم

یادآوری ① مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها.

② مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها.

مطابق شکل روبه‌رو چون $DE \parallel BC$ است، پس $\frac{۳}{۵} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$.

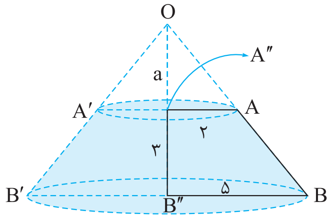


$$\frac{S_{\overset{\square}{DEFB}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{BD \times BF \sin B}{\frac{۱}{۲} AB \times BC \sin B}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\square}}{S_{\text{کل}}} = \frac{۲BD \times BF}{AB \times BC} = \frac{۲(۵x - ۳x)(۳y)}{۵x \times ۵y} = \frac{۱۲}{۲۵} = \%۴۸$$

۳- گزینه‌ی «۳» راه‌اول

یادآوری از دوران یک ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه حول ساق قائم آن یک مخروط ناقص به وجود می‌آید که ارتفاع آن برابر ساق قائم ذوزنقه بوده و شعاع‌های قاعده‌ی آن همان قاعده‌های ذوزنقه هستند.

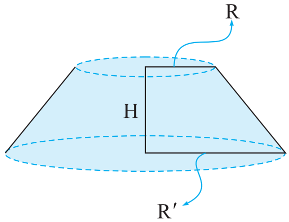


در شکل مقابل اگر پاره‌خط‌های AB و A′B′ (یعنی ساق‌های مایل ذوزنقه‌ی اولیه و قرینه‌اش به محور تقارن یا همان ساق قائم) را امتداد دهیم یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع می‌کنند که می‌توانیم این نقطه را رأس یک مخروط کلی در نظر بگیریم.

$$\overset{\Delta}{OBB''}: AA'' \parallel BB'' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA''}{OB''}=\frac{AA''}{BB''} \Rightarrow \frac{a}{a+۳}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow a=۲$$

$$V_{\text{مخروط ناقص}}=V_{\text{مخروط کل}}-V_{\text{مخروط سفیدرنگ}}=\frac{۱}{۳}\pi R^۲\underset{(a+۳)}{\underset{\downarrow}{H}}-\frac{۱}{۳}\pi r^۲\underset{a}{\underset{\downarrow}{h}}=\frac{۱}{۳}\pi(۵^۲\times۵-۲^۲\times۲)=۳۹\pi$$

راه‌دوم حجم مخروط ناقصی به ارتفاع H و شعاع‌های قاعده‌ی R و R′ برابر است با:



$$\frac{\pi H}{۳}(R^۲+R'^۲+RR')$$

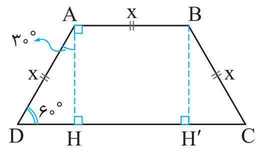
در این مسئله داریم:

$$R=۲\,,\,R'=۵\,,\,H=۳$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi\times۳}{۳}(۲^۲+۵^۲+۲\times۵)=۳۹\pi$$

۴- گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم در یک مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰°، نصف وتر و ضلع مجاور به آن (یا مقابل به زاویه‌ی ۶۰°)، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر وتر است. مطابق شکل، قاعده‌ی کوچک و ساق‌های ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین را x گرفته‌ایم و از دو سر قاعده‌ی کوچک بر قاعده‌ی بزرگ عمود نموده‌ایم، در این صورت چهارضلعی ABH′H یک مستطیل است:

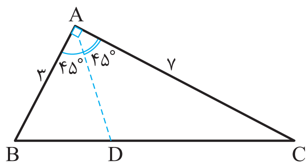


$$CH'=DH=\frac{x}{۲}\,,\,AH=\frac{x\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow DC=DH+HH'+CH'=\frac{x}{۲}+x+\frac{x}{۲}=۲x$$

$$\text{محیط ذوزنقه}=۳۰ \Rightarrow AB+BC+DC+DA=۳۰ \Rightarrow ۵x=۳۰ \Rightarrow x=۶$$

$$S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{۲}AH=\frac{x+۲x}{۲}\times\frac{x\sqrt{۳}}{۲}\xrightarrow{x=۶}S_{ABCD}=۲۷\sqrt{۳}$$

۵- گزینه‌ی «۲» راه‌اول



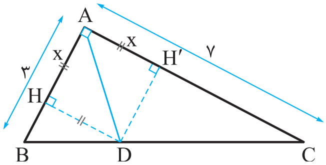
یادآوری مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها.

در این مسئله مشخص است که مساحت مثلث ABC، با رسم نیمساز AD، به دو بخش تبدیل شده است:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{ABD}}+S_{\overset{\Delta}{ADC}} \Rightarrow \frac{۱}{۲}AB\times AC\underbrace{\sin۹۰^\circ}_{۱}=\frac{۱}{۲}AB\times AD\sin۴۵^\circ+\frac{۱}{۲}AD\times AC\sin۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{۱}{۲}}AB\times AC=(\cancel{\frac{۱}{۲}}AD\sin۴۵^\circ)(AB+AC) \Rightarrow ۳\times۷=AD\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۳+۷) \Rightarrow AD=\frac{۴۲}{۱۰\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۲/۱\sqrt{۲}$$

راه‌دوم مطابق شکل از نقطه‌ی D پای نیمساز داخلی AD، بر دو ضلع AB و AC عمودهایی اخراج شده است.

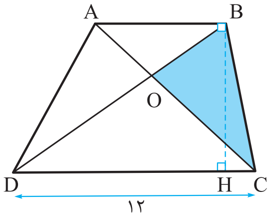


می‌دانیم فاصله‌ی هر نقطه روی نیمساز یک زاویه (از جمله پای نیمساز) از دو ضلع آن زاویه، یکسان است، پس $DH = DH'$ و چهارضلعی $AHDH'$ هم که چهار زاویه‌ی قائمه دارد، پس این چهارضلعی در حقیقت یک مربع است.

$$\overset{\Delta}{ABC}: DH \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BH}{AB}=\frac{DH}{AC} \Rightarrow \frac{۳-x}{۳}=\frac{x}{۷} \Rightarrow x=۲/۱$$

از طرفی AD قطر این مربع بوده و $\sqrt{۲}$ برابر ضلع مربع است: $AD=\sqrt{۲}\,x=۲/۱\sqrt{۲}$

۶- گزینه‌ی «۳» راه‌اول



یادآوری با رسم دو قطر ذوزنقه:

① مساحت دو مثلث محدود به قطرها و یک ساق ذوزنقه با هم برابرند.

② دو مثلثی که به قاعده‌ها و قطرهای ذوزنقه محدود می‌شوند با هم متشابه‌اند.

در این مسئله با داشتن قاعده‌ی $DC=۱۲$ و ارتفاع برابر ۱۰ داریم: $S_{\overset{\Delta}{DBC}}=\frac{۱}{۲}BH\times DC=۶۰$

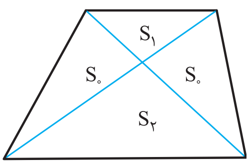
حال چون دو مثلث AOB و DOC متشابه‌اند، داریم:

$$\frac{\overbrace{AB}^{۸}}{\underbrace{DC}_{۱۲}}=\frac{OB}{OD} \Rightarrow \frac{OB}{OD}=\frac{۲}{۳} \quad (*)$$

و در نهایت دو مثلث OBC و DBC در رأس C مشترک بوده و قاعده‌های OB و DB روبه‌روی این رأس در دو مثلث، روی یک خط راست واقع‌اند، پس نسبت مساحت این دو مثلث برابر است با نسبت قاعده‌های آن‌ها:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{OBC}}}{S_{\overset{\Delta}{DBC}}}=\frac{OB}{DB} \xrightarrow{*:\frac{OB}{OD}=\frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{OB}{DB}=\frac{۲}{۵}} \frac{S_{\overset{\Delta}{OBC}}}{۶۰}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OBC}}=۲۴$$

راه‌دوم



● مطابق شکل، **ذوزنقه‌ای با دو قطرش رسم شده است. اگر قاعده‌ی بزرگ ذوزنقه n برابر قاعده‌ی کوچک باشد:**

① $S_۲=n^۲S_۱$ ② $S_۰^۲=S_۱S_۲$

در این مسئله قاعده‌ی بزرگ ۱۲ و قاعده‌ی کوچک ۸ است، پس $n=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$، بنابراین $S_۲=n^۲S_۱=\frac{۹}{۴}S_۱$.

$$S_۰^۲=S_۱S_۲=S_۱(\frac{۹}{۴}S_۱) \Rightarrow S_۰=\frac{۳}{۲}S_۱ \quad (*)$$

از طرفی مساحت کل ذوزنقه عبارت است از:

$$S_{\text{کل}}=\frac{۸+۱۲}{۲}\times ۱۰=۱۰۰ \xrightarrow{S_{\text{کل}}=۲S_۰+S_۱+S_۲} ۱۰۰=۲(\frac{۳}{۲}S_۱)+S_۱+\frac{۹}{۴}S_۱ \Rightarrow ۱۰۰=\frac{۲۵}{۴}S_۱$$

$$\Rightarrow S_۱=۱۶ \xrightarrow{(*)} S_۰=\frac{۳}{۲}S_۱=\frac{۳}{۲}\times ۱۶=۲۴$$

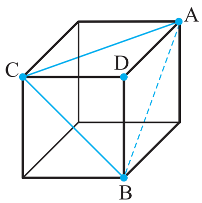
راه‌سوم اگر قاعده‌ی بزرگ ذوزنقه n برابر قاعده‌ی کوچک آن باشد، در این صورت مساحت هر کدام از دو مثلث محدود به دو قطر و یک ساق ذوزنقه از دستور زیر به دست می‌آید: $S_{\circ}=\frac{n}{(n+۱)^{۲}}S_{\text{کل}}$

در این مسئله $n=\frac{\text{قاعده‌ی بزرگ}}{\text{قاعده‌ی کوچک}}=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$ و $S_{\text{کل}}=۱۰۰$ است:

$$S_{\circ}=\frac{\frac{۳}{۲}}{(\frac{۳}{۲}+۱)^{۲}}\times ۱۰۰=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۲۵}{۴}}\times ۱۰۰=۲۴$$

دقت کنید در نکته‌ی گفته‌شده مساحت مثلث کوچک‌تر (محدود به دو قطر و قاعده‌ی کوچک) از رابطه‌ی $S_{۱}=\frac{S_{\text{کل}}}{(n+۱)^{۲}}$ و مساحت مثلث بزرگ‌تر (محدود به دو قطر و قاعده‌ی بزرگ) از دستور $S_{۲}=\frac{n^{۲}S_{\text{کل}}}{(n+۱)^{۲}}$ به دست خواهد آمد.

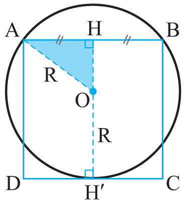
۷- گزینه‌ی «۲» **یادآوری** قطر وجه مکعبی به ضلع a برابر است با $a\sqrt{۲}$.



مطابق شکل، مکعبی به یال ۴ رسم شده و از رأس A، B و C صفحه‌ای عبور کرده است، پس مقطع این صفحه، یک مثلث متساوی‌الاضلاع است، زیرا اضلاع این مثلث همگی قطرهای وجه مکعب هستند:

$$AB=\overset{\overset{۴}{\uparrow}}{a}\sqrt{۲}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{(AB)^{۲}\sqrt{۳}}{۴}=\frac{(۴\sqrt{۲})^{۲}\sqrt{۳}}{۴}=۸\sqrt{۳}$$

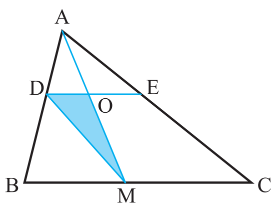
۸- گزینه‌ی «۲» مطابق شکل، دایره‌ای بر رئوس A و B از مربع ABCD گذشته و بر ضلع DC از این مربع مماس است. چون مماس و شعاع در نقطه‌ی تماس، بر هم عمودند، پس $OH'\perp DC$ است و از مرکز دایره در راستای OH' امتداد می‌دهیم تا AB را در نقطه‌ی H قطع کند. چون $AB\parallel DC$ می‌باشد، پس $OH\perp AB$ و می‌دانیم خطی که از مرکز دایره، بر وتری از دایره عمود می‌شود، وتر را نصف می‌کند.



$$AH=HB=\frac{AB}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲\quad ,\quad OH=HH'-OH'=۴-R$$

$$\overset{\Delta}{OAH}:OA^{۲}=OH^{۲}+AH^{۲}\Rightarrow R^{۲}=(۴-R)^{۲}+۲^{۲}\Rightarrow R^{۲}=۱۶+R^{۲}-۸R+۴\Rightarrow R=۲/۵$$

۹- گزینه‌ی «۱» **راه‌اول** مطابق شکل با توجه به فرض $\frac{AD}{DB}=\frac{۲}{۳}$ و $DE\parallel BC$ نتیجه می‌گیریم $\frac{AD}{DB}=\frac{AO}{OM}=\frac{۲}{۳}$ پس $AO=۲x$ و $OM=۳x$:



$$(۱)\quad \frac{S_{\overset{\Delta}{DOM}}}{S_{\overset{\Delta}{ADM}}}=\frac{OM}{AM}=\frac{۳x}{۲x+۳x}=\frac{۳}{۵}$$

$$(۲)\quad \frac{S_{\overset{\Delta}{ADM}}}{S_{\overset{\Delta}{ABM}}}=\frac{AD}{AB}=\frac{AO}{AM}=\frac{۲x}{۲x+۳x}=\frac{۲}{۵}$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{DOM}}}{S_{\overset{\Delta}{ADM}}} \times \frac{S_{\overset{\Delta}{ADM}}}{S_{\overset{\Delta}{ABM}}} = \frac{۳}{۵} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۶}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{DOM}}}{S_{\overset{\Delta}{ABM}}} = \frac{۶}{۲۵}$$

$$\xrightarrow[\text{مثلث } ABC \text{ است.}]{AM \text{ میانه‌ی}} \frac{S_{\overset{\Delta}{DOM}}}{\frac{۱}{۲}S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۶}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{DOM}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۶}{۵۰} = ٪۱۲$$

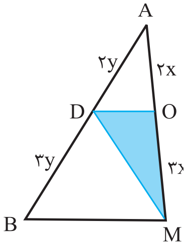
راه‌دوم در شکل رسم‌شده در روش قبل، چون $DO \parallel BM$ است، پس $\overset{\Delta}{ADO} \sim \overset{\Delta}{ABM}$ ؛ بنابراین $\frac{S_{\overset{\Delta}{ADO}}}{S_{\overset{\Delta}{ABM}}} = (\frac{AO}{AM})^۲ = \frac{۴}{۲۵}$ و

چون $S_{\overset{\Delta}{ABM}} = \frac{۱}{۲}S_{\overset{\Delta}{ABC}}$، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADO}}}{\frac{۱}{۲}S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۴}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ADO}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۴}{۵۰} \quad (*)$$

از طرفی $(**) \quad \frac{S_{\overset{\Delta}{DOM}}}{S_{\overset{\Delta}{ADO}}} = \frac{OM}{OA} = \frac{۳}{۲}$ و با ضرب طرفین روابط $(*)$ و $(**)$ داریم:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADO}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} \times \frac{S_{\overset{\Delta}{DOM}}}{S_{\overset{\Delta}{ADO}}} = \frac{۴}{۵۰} \times \frac{۳}{۲} = ٪۱۲$$

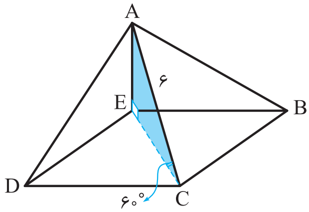


راه‌سوم مطابق شکل روبه‌رو، مثلث ABM را از مثلث ABC جدا کرده‌ایم. مثلث‌های ADO و DOM دارای رأس مشترک D بوده و قاعده‌ی روبه‌رو به این رأس در دو مثلث مذکور روی یک خط راست (AM) بوده و مساحت این دو مثلث به نسبت قاعده‌های ۲x و ۳x تقسیم می‌شوند. مثلاً فرض می‌کنیم $S_{\overset{\Delta}{ADO}} = ۲S$ و $S_{\overset{\Delta}{DOM}} = ۳S$. به همین ترتیب مساحت دو مثلث ADM و BDM به نسبت قاعده‌ها تقسیم می‌شوند:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADM}}}{S_{\overset{\Delta}{BDM}}} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow \frac{۲S+۳S}{S_{\overset{\Delta}{BDM}}} = \frac{۲y}{۳y} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{BDM}} = ۷/۵S \xrightarrow{AM \text{ میانه}} S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۲S_{\overset{\Delta}{ABM}}$$

$$= ۲\underbrace{(S_{\overset{\Delta}{ADO}} + S_{\overset{\Delta}{DOM}} + S_{\overset{\Delta}{BDM}})}_{۲S+۳S+۷/۵S} = ۲۵S \Rightarrow \text{مطلوب} = \frac{S_{\overset{\Delta}{DOM}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۳S}{۲۵S} = \frac{۳}{۲۵} = \frac{۱۲}{۱۰۰}$$

۱۰- گزینه‌ی «۲» مطابق شکل، قاعده‌ی BCDE از هرم ABCDE یک مربع بوده و یال AE بر این قاعده عمود است.



پس مثلث AEC در رأس E قائم‌الزاویه بوده و یک زاویه‌ی ۶۰° هم دارد. (طبق فرض، زاویه‌ی بین یال AC به عنوان بزرگ‌ترین یال مکعب با تصویرش روی قاعده‌ی هرم، یعنی پاره‌خط EC برابر ۶۰° است.)

$$\begin{cases} AE = AC\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳} = H(\text{ارتفاع هرم}) \\ EC = \frac{AC}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳ = \text{قطر قاعده‌ی مربعی} \Rightarrow S_{\text{قاعده}} = \frac{EC^۲}{۲} = ۴/۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\text{هرم}} = \frac{۱}{۳}S_{\text{قاعده}}H = \frac{۱}{۳} \times ۴/۵ \times ۳\sqrt{۳} = ۴/۵\sqrt{۳}$$

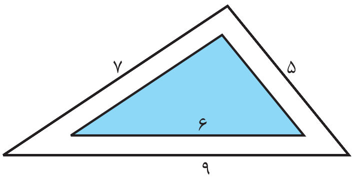
۱۱- گزینه‌ی «۱» می‌دانیم در مثلث ABC بین هر کدام از اضلاع و ارتفاع نظیرش رابطه‌ی « $\text{ارتفاع} = \dfrac{\text{دو برابر مساحت}}{\text{ضلع نظیر}}$ » برقرار است.

$$h_a + h_b = h_c \Rightarrow \frac{۲S}{a} + \frac{۲S}{b} = \frac{۲S}{c} \Rightarrow \cancel{۲S}\left(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}\right) = \frac{\cancel{۲S}}{c} \Rightarrow \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{c} \Rightarrow c = ۶$$

۱۲- گزینه‌ی «۲» می‌دانیم در یک شش‌ضلعی منتظم به ضلع a، مساحت $S = \dfrac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}$ بوده و قطر کوچک $a\sqrt{۳}$ است (قطر بزرگ ۲a می‌باشد):

$$۹\sqrt{۳} = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow a = \sqrt{۶} \Rightarrow \text{قطر کوچک} = a\sqrt{۳} = \sqrt{۶} \times \sqrt{۳} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

۱۳- گزینه‌ی «۳» مطابق شکل از موازی‌بودن اضلاع دو مثلث نتیجه می‌شود دو مثلث متشابه‌اند.



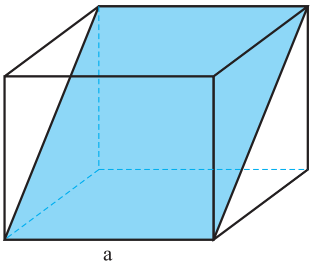
$$\text{مربع نسبت دو ضلع نظیر} = \frac{S \text{ مساحت مثلث بزرگ}}{S' \text{ مساحت مثلث کوچک}}$$

$$= \left(\frac{\text{بزرگ‌ترین ضلع مثلث بزرگ}}{\text{بزرگ‌ترین ضلع مثلث کوچک}}\right)^۲ = \left(\frac{۹}{۶}\right)^۲ = \frac{۹}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{S - S'}{S'} = \frac{۹-۴}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مساحت بین دو مثلث}}{\text{مساحت مثلث کوچک‌تر}} = \frac{۵}{۴} = ۱/۲۵$$

۱۴- گزینه‌ی «۴» مطابق شکل، یکی از شش صفحه‌ی قطری مکعبی به یال a رسم شده است. ابعاد این مستطیل a و $a\sqrt{۲}$ (قطر وجه مکعب) می‌باشد.



$$S_{\text{صفحه‌ی قطری}} = ۹\sqrt{۲} \Rightarrow a \times a\sqrt{۲} = ۹\sqrt{۲} \Rightarrow a = ۳$$

$$\Rightarrow \text{قطر مکعب} = a\sqrt{۳} = ۳\sqrt{۳}$$